

Une comparaison de deux méthodes de
projection pour la résolution des systèmes
d'équations intégrales et
intégro-différentielles de Fredholm et de
Volterra.

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à :
Dieu tout puissant, pour la volonté, et la santé et la patience qu'il
nous donnait durant toutes ces années d'études afin que
nous Puissions en arriver là.

Comme nous tenons à remercier notre

Encadreur : **Mr.Merzougui Abdelkrim**

Merci à tous les enseignants et les Etudiants

De département mathématique

Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont

Met à notre disposition pour réaliser ce travail.

Enfin à toute personne qui a collaborée à la réalisation

Du présent mémoire.

Merci .

Dédicaces

De Ben Ferhat Elamin:

Au nom de Allah chément et le miséricordieux.

-Je dédie ce modeste travail.

- A Mon père

Tes sacrifices et tes Prières m'ont permis de vivre ce jour. Rien ne saurait exprimer la fierté, la reconnaissance et l'amour que je te porte. que Dieu le tout puissant te procure, santé et longue vie.

A Ma Mère

Avec tout mon amour pour ton soutien et tes encouragements. j'espère rester à la hauteur de tes espoirs que Dieu te protège et t'accorde santé et longue vie

-A Omli

-A mes chères soeurs Hanan et Ikram

-A ma frère Hamza

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion, Enfin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

De Zouaza Zinelabiddine:

Au nom de Allah chément et le miséricordieux.

Je dèdie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes frères et sœurs.

Pour ma grande famille

Pour ma petite famille, ma femme **Souria** et mon fils **Iyed** .

Pour tous mes proches et amis.

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion

En fin je dédie ce mémoire à mes collégues et tous ceux qui me sont cheres

Table des matières

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Table des matières	ii
Liste des figures	vii
List des Tableaux	viii
notatios	ix
Introduction	1
1 Rappels d'analyse fonctionnelle	3
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	3
1.2 Espace $L_2([a, b])$	3
1.3 Espace $C^k([a, b])$	3
1.4 Espace Normé	4
1.5 Espace complets	4
1.6 Espace de Banach	5
1.7 Espace de Hilbert	5
1.8 Notions sur les opérateurs	6
1.8.1 Operateur Compact	6
1.8.2 Opérateur intégral linéaire	7

2	Polynômes de Legendre et systèmes d'équations intégrales	8
2.1	Polynôme de Legendre	8
2.1.1	Les polynômes	8
2.1.2	Les polynômes de Legendre	9
2.1.3	Fonction génératrice	10
2.1.4	Formule de récurrence de Bonnet	10
2.1.5	Formule de Rodrigues	10
2.1.6	Propriétés	11
2.1.7	Décomposition en série de polynômes de Legendre	11
2.1.8	Intégration numérique d'une fonction	12
2.2	Les systèmes d'équations intégrales	13
2.2.1	Classifications des Systèmes d'équations intégrales	13
2.2.2	Systèmes d'équations intégrales de Fredholm	14
2.2.3	Système d'équations intégrales de Volterra	15
2.3	Méthodes d'approximation pour les équations intégrales	15
2.3.1	Méthodes de projection	16
2.3.2	Méthode de collocation	17
2.3.3	Méthode de Galerkin	18
2.3.4	Méthode de Petrov-Galerkin	18
3	Résolution numérique des systèmes d'équations intégrales	20
3.1	Résolution numérique des systèmes d'équations intégrales par la méthode de collocation	20
3.1.1	Aproximation numérique des systèmes d'équations intégrales de Fredholm	20
3.1.2	Aproximation Numérique de système d'équations intégrales de Volterra	23
3.2	Résolution des systèmes d'équations intégrales par la méthode de Galerkin	25
3.2.1	Aproximation Numérique de Système d'équations intégrales de Fredholm	25
3.2.2	Aproximation Numérique des système d'équations intégrales de Volterra	28

3.3	Exemples	32
4	Résolution numérique des systèmes d'équations intégr-différentielles.	41
4.1	Résolution des systèmes d'équations intégr-différentielles par la méthode de Collocation	41
4.1.1	Aproximation numérique des systèmes d'équations intégr-différentielles de Fredholm	41
4.1.2	Aproximation numérique des systèmes d'équations intégr-différentielles de Volterra	45
4.2	Résolution des systèmes d'équations Intégr-différentielles par la méthode de Galerkin	49
4.2.1	Aproximation Numérique de Système d'équations intégr-différentielles de Fredholm	49
4.2.2	Aproximation Numérique du systme d'équations intégr-différentielles de Volterra	54
4.3	Exemples	59
	Conclusion	71
	Bibliographie	72

Liste des Figures

3.3.1 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 1	
pour $n = 10$	33
3.3.2 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 2	
pour $n = 10$	34
3.3.3 Comparaison entre les solutions approchés et la solution exacte de l'exemple 3	
pour $n = 10$	36
3.3.4 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 4	
pour $n = 10$	37
3.3.5 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 5	
pour $n = 10$	39
3.3.6 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 6	
pour $n = 10$	40
4.3.1 Comparaison entre la solution approchés et la solution exacte de l'exemple 7	
pour $n = 10$	60
4.3.2 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 8	
pour $n = 10$	61
4.3.3 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 9	
pour $n = 10$	63
4.3.4 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple	
10 pour $n = 10$	64
4.3.5 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple	
11 pour $n = 10$	66

4.3.6 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple	
12 pour $n = 10$	67
4.3.7 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple	
13 pour $n = 10$	69
4.3.8 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple	
14 pour $n = 20$	70

List des Tableaux

3.3.1	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple 1 pour $m = 10$	34
3.3.2	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple 2 pour $m = 10$	36
3.3.3	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple 3 pour $m = 10$	37
3.3.4	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple 4 pour $m = 10$	39
3.3.5	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple 5 pour $m = 10$	40
3.3.6	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple 6 pour $m = 10$	42
4.3.1	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple 7 pour $m = 10$	61
4.3.2	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple 8 pour $m = 10$	63
4.3.3	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple 9 pour $m = 10$	64
4.3.4	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple10 pour $m = 10$	66
4.3.5	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple11 pour $m = 10$	68
4.3.6	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple12 pour $m = 10$	69
4.3.7	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple13 pour $m = 10$	71
4.3.8	Comparaison entre l'erreur de methode de colocation et l'erreur de methode de Galerkin de l'exemple14 pour $m = 10$	72

NOTATIONS

- $L_2([a, b])$: L'ensemble de toutes les fonctions de carrée intégrable sur $[a, b]$.
- $C^k([a, b])$: L'ensemble des fonctions k fois continuellement dérivables sur $[a, b]$.
- H : L'espaces de Hilbert
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire.
- $\|\cdot\|$: La norme.
- \mathbb{R} : Ensemble des réels.
- \mathbb{C} : Ensemble des nombres réels.
- \simeq : Approximation.
- A : Opérateur intégrale compact.
- $L_{i,n}$: Polynôme de legendre
- P_n : Polynôme orthogonaux.
- $K(x, t)$: Le noyau de l'intégrale.
- $f(x)$: Fonction donnée.
- λ : Un paramètre non nul, réel ou complexe..
- c_i : Coefficients du polynôme de legendre.
- $R_n[x]$: L'espace des polynômes.

Introduction

Les équations intégrales sont le modèle mathématique de beaucoup des problèmes de biologie et de chimie ; elles sont aussi importantes dans plusieurs domaines de physique par exemple les équations de Maxwell sont probablement les plus célèbres représentants ces équations. Elles apparaissent aussi dans des problèmes des transferts d'énergie radiative et des problèmes d'oscillations d'une corde ou d'une membrane. Ainsi que les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de l'assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé. Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique. La résolution des systèmes des équations intégrales linéaires par les polynômes de Legendre à une importance dans l'analyse fonctionnelle et les problèmes pratiques ceci est d'un fait qu'un grand nombre de lois et des relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme des systèmes des équations intégrales.

Le but de ce travail est de trouver une solution des systèmes des équations intégrales par les polynômes de Legendre.

Notre travail de est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre on donne quelques rappels sur d'analyse fonctionnelle et des notions préliminaire sur les opérateurs.

Dans le deuxième chapitre on donne quelques définitions et propriétés sur les polynômes de Legendre et les systèmes d'équations intégrales

Le troisième chapitre traite la résolution numérique des systèmes d'équations intégrales linéaire par deux méthodes de projection à savoir méthode de collocation et méthode de Galerkin, des exemples illustratifs sont donnés en fin de chapitre. Enfin dans le quatrième chapitre nous traitons la résolution numérique des systèmes d'équations intégrales différentielles par la méthode de collocation et la méthode de Galerkin. La solution approchée est donnée sous forme d'une combinaison linéaire de polynôme de Legendre, en estimant les erreurs pour chaque méthode et comparons la solution approchée avec la solution exacte.

..

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

L'étude de diverse classe des systèmes d'équations intégrales nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels, tels que les espaces de Banach ou de Hilbert. Dans ce chapitre, on donne des définitions de base sur l'analyse fonctionnelle, les espaces des fonctions continues sur un intervalle fermé, on donne aussi quelques notions sur les opérateurs.

1.2 Espace $L_2([a, b])$

Définition 1.2.1 On dit qu'une fonction f est carrée intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)dx < \infty$$

$L_2([a, b])$: l'ensemble de toutes les fonctions carrée intégrable sur $[a, b]$.

1.3 Espace $C^k([a, b])$

Définition 1.3.1 Les éléments de cet espace sont tous les fonctions définies et possédant sur cet intervalle $[a, b]$ des dérivées continues jusqu'à l'ordre k , la norme d'un élément

$f \in C^k([a, b])$ est défini par :

$$\|f\| = \sum_{i=0}^k \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(i)}(x)|$$

1.4 Espace Normé

Définition 1.4.1 (Norme)

Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Une norme sur E est une fonction $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur E à valeurs dans l'ensemble \mathbb{R} , vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $\forall u \in E \quad N(u) \geq 0$ [positivité]
 - (2) $N(0) = 0$ [nullité à l'origine de E]
 - (3) $N(u) = 0$ implique $u = 0$ [séparation]
 - (4) $\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$ [positivité]
 - (5) $\forall u, v \in E : N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ [inégalité triangulaire ou inégalité de convexité].
- Pour $u \in E$, $N(u)$ est appelé norme de u .

Notation 1.4.1 En général la norme noté par $\|\cdot\|$.

Définition 1.4.2 (Distance associée à une norme)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , et soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . On associe à cette norme, une distance d sur E par :

$$\forall u \in E \quad \forall v \in E \quad d(u, v) = \|u - v\|.$$

Définition 1.4.3 (Espace Normé) L'espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle espace normé.

1.5 Espace complets

Définition 1.5.1 (Espaces complets)

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'éléments de E est une suite convergente dans E .

1.6 Espace de Banach

Définition 1.6.1 On appelle espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Exemple 1.6.1 Tous espace vectoriel normé de dimension finie (en particulier les \mathbb{R}^n) est un espace de Banach

1.7 Espace de Hilbert

On se donne un espace vectoriel sur \mathbb{R} , appelé H .

Définition 1.7.1 On appelle produit scalaire sur H une forme bilinéaire symétrique

définie positive $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que

(i) (Linéarité à droite) $B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v)$, $B(u, v + v') = B(u, v) + B(u, v')$,

(ii) (Symétrie) $B(u, v) = B(v, u)$.

(iii) (Définie positive) $B(u, u) \geq 0$ et $B(u, u) = 0 \iff u = 0$.

Théorème 1.7.1 L'application $u \longrightarrow \|u\| = \sqrt{B(u, u)}$

est une norme appelée norme associée au produit scalaire B (on parle aussi de norme hilbertienne) et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|B(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$

et il n'y a égalité que si u et v sont parallèles ($u = \lambda v$ ou bien $v = 0$)

Rappelons aussi "l'inégalité du parallélogramme" : $\|\frac{u+v}{2}\|^2 + \|\frac{u-v}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Rappelons aussi que le produit scalaire (u, \cdot) est une forme linéaire,

voir les Théorèmes 6.1 livre [Topologie et analyse différentielle] et Théorèmes précédents elle est donc continue.

On vérifie aisément que l'application $(u, v) \longrightarrow B(u, v)$ est continue de $H \times H$ dans \mathbb{R} .

Définition 1.7.2 (Espace de Hilbert)

On dit que (H, B) est un espace de Hilbert si, muni de la norme associée à la forme bilinéaire B , H est complet.

1.8 Notions sur les opérateurs

1.8.1 Operateur Compact

Définition 1.8.1 Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné en un ensemble relativement compact dans Y .

Définition 1.8.2 On dit qu'une application linéaire T d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est compact, si $\overline{T(B_E)}$ est une partie compact de F . Une application linéaire compact est aussi appelé opérateur compact. On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F .

Remarque 1.8.1 Toute application linéaire compacte est continue

Théorème 1.8.1 Un opérateur A de X dans Y est compact si et seulement si pour tout suite borné (u_n) de X , la suite (Au_n) contient une sous suite convergente dans Y .

Théorème 1.8.2 Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Théorème 1.8.3 Une combinaison linéaire $A = A_1 + A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Théorème 1.8.4 Le produit $A \times B$ de deux opérateurs borné A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Théorème 1.8.5 Soient X un espace normé et Y un espace de Banach et soit (A_n) une suite d'opérateur compact de X dans Y , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de X dans Y .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors A est compact.

Théorème 1.8.6 Soit A un opérateur borné de X dans Y à l'image $A(X)$ de dimension fini, alors A est compact.

Théorème 1.8.7 L'opérateur identique I de X dans X est compact si et seulement si X est de dimension finie.

1.8.2 Opérateur intégral linéaire

Théorème 1.8.8 Soit G un ensemble compact de \mathbb{R}^n et soit K une fonction continue de $G \times G$ dans \mathbb{C} , alors l'opérateur linéaire définie de $C(G)$ dans $C(G)$ par:

$$(Au)(x) = \int_G |k(x, y)u(y)| dy, \quad \forall x \in G$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu K , cet opérateur est borné, la norme $\|A\|$ est donnée par:

$$\|A\| = \max_{x \in G} \int_G |k(x, y)| dy, \quad \forall x \in G$$

une classe particulièrement simple les opérateurs intégraux est contitue, les opérateurs à noyau dits dégénérés sont de la forme:

$$k(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j(x)b_j(y)$$

Théorème 1.8.9 Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique sur X . Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Chapitre 2

Polynômes de Legendre et systèmes d'équations intégrales

2.1 Polynôme de legendre

2.1.1 Les polynômes

Définition 2.1.1 (*Orthogonalité*)

On dit que deux vecteurs x et y d'un espace euclidien E sont orthogonaux si leur produit scalaire $\langle x, y \rangle = 0$.

Propriétés

- Si un vecteur x de E est orthogonal à chaque vecteur d'un ensemble F , on dit que x est orthogonal à l'ensemble F , et on écrit

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in F.$$

- Si les vecteurs de deux ensembles E et F sont orthogonaux deux à deux, on dit que ces ensemble orthogonaux, et on écrit

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in E, \forall y \in F.$$

Définition 2.1.2 Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dans $L^2[a, b]$ sont dites orthogonales sur l'intervalle $[a, b]$ par rapport à une fonction de poids continue et non négative $W(x)$ si

$$\int_a^b W(x)f(x)g(x)dx = 0. \quad (2.1.1)$$

Nous utilisons la notation

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b W(x)f(x)g(x)dx. \quad (2.1.2)$$

Où W, f et g sont des fonctions de $L^2[a, b]$ alors la condition d'orthogonalité est équivalent à

$$\langle f, g \rangle = 0, \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Les polynômes de Legendre

les polynômes de Legendre constituent l'exemple d'une suite de polynômes orthogonaux. Ce sont des solutions particulières de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad (2.1.4)$$

dans le cas particulier où le paramètre n est un entier. Les polynômes de Legendre sont définis uniquement pour $x \in [-1, 1]$ puisque les points $x = \pm 1$ sont des points singuliers réguliers de cette équation différentielle.

Les polynômes de Legendre constituent un cas particulier des polynômes de Jacobi d'indice n , $P_n(\alpha, \beta)$ pour lesquels les paramètres α et β sont nuls: $P_n = P_n^{0,0}$.

Une définition équivalente, plus abstraite, mais intéressante sur le plan conceptuel, est de considérer que les polynômes de Legendre sont les fonctions propres de l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$P \in \mathbb{R}[X] \mapsto u(P) = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right], \quad (2.1.5)$$

pour la valeur propre $-n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Quelques polynômes

Les premiers polynômes de Legendre sont données par :

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= x, \\ p_2(x) &= (1/2)(3x^2 - 1), \\ p_3(x) &= (1/2)(5x^3 - 3x), \\ p_4(x) &= (1/8)(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ p_5(x) &= (1/8)(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ p_6(x) &= (1/16)(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5). \end{aligned}$$

2.1.3 Fonction génératrice

La fonction génératrice des polynômes de Legendre est donnée par :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad x \in [-1, +1]. \quad (2.1.6)$$

2.1.4 Formule de récurrence de Bonnet

Cette formule de récurrence permet d'obtenir rapidement l'expression du polynôme de Legendre d'ordre $n+1$ à partir de ceux d'ordres n et $n-1$. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (2.1.7)$$

avec $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$, Elle se démontre facilement à partir de la fonction génératrice.

2.1.5 Formule de Rodrigues

En prenant pour condition de normalisation $P_0(x) = 1$, le polynôme $P_n(x)$ peut s'exprimer en utilisant la formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)]^n. \quad (2.1.8)$$

Définition 2.1.3 *Les polynômes de Legendre peuvent s'écrire sous forme de somme :*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-2k} (x+1)^k \quad (2.1.9)$$

Où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (2.1.10)$$

2.1.6 Propriétés

1. Les polynômes P_n sont de degré n .
2. La famille $(P_n)_{n \leq N}$ étant une famille de polynômes à degrés étagés, elle est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_N[X]$.
3. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.
4. $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$

2.1.7 Décomposition en série de polynômes de Legendre

Décomposition d'une fonction holomorphe

Toute fonction f , holomorphe à l'intérieur d'une ellipse de foyers -1 et $+1$, peut s'écrire sous la forme d'une série qui converge uniformément sur tout compact à l'intérieur de l'ellipse :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n(z) \quad (2.1.11)$$

Avec $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_n \in \mathbb{C}$.

Décomposition d'une fonction lipschitzienne

On note \tilde{P}_n le quotient du polynôme P_n par sa norme.

Soit f une application continue sur $[-1, 1]$. Pour tout entier naturel n on pose

$$c_n(f) = \int_{-1}^1 f(x) \tilde{P}_n(x) dx \quad (2.1.12)$$

,

Alors la suite $c_n(f)$ est de carré sommable, et permet d'expliciter le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$S_n f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \tilde{P}_k \quad (2.1.13)$$

On a de plus :

1. $\forall x \in [-1, 1], S_n f(x) = \int_{-1}^1 K_n(x, y) f(y) dy$, avec $K_n(x, y) = \frac{n+1}{2} \frac{\tilde{P}_{n+1}(x) \tilde{P}_n(y) - \tilde{P}_{n+1}(y) \tilde{P}_n(x)}{x-y}$
2. $S_n f(x) - f(x) = \int_{-1}^1 K_n(x, y) (f(y) - f(x)) dy$.

Supposons de plus que f est une fonction lipschitzienne. On a alors la propriété supplémentaire :

$$\forall x \in]-1, 1[, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x).$$

autrement dit, l'égalité

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \tilde{P}_k \quad (2.1.14)$$

est vraie non seulement au sens L^2 mais au sens de la convergence simple sur $] -1, 1[$.

2.1.8 Intégration numérique d'une fonction

Afin de calculer numériquement l'intégrale d'une fonction sur l'intervalle $[-1, 1]$, l'une des méthodes les plus populaires est la méthode de quadrature de Gauss-Legendre fondée sur les propriétés des polynômes de Legendre. Elle prend la forme :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (2.1.15)$$

avec :

1. $(x_i)_{i \leq n}$ l'ensemble des zéros du polynôme de Legendre P_n
2. $(w_i)_{i \leq n}$ les poids respectifs: $w_i = \frac{-2}{(n+2)P'_n(x_i), P_{n+1}(x_i)}$

En particulier, la formule à l'ordre n est exacte pour toute fonction polynomiale de degré $2n - 1$.

2.2 Les systèmes d'équations intégrales

Définition 2.2.1

Les systèmes d'équations intégrales ont un caractère fort différent des systèmes d'équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques (par exemple phénomène de diffusion), la principale source des systèmes d'équations de ce type est l'étude du transfert d'énergie par radiation, A la différence du transfert radiatif, les phénomènes de radiation ne peuvent pas être décrit à l'aide des systèmes d'équations mettant en jeu un simple champ scalaire. Les lois de conservation deviennent alors plus complexe et ne peuvent s'exprimer que sous formes d'intégrales étendues à toute la surface considérée.

2.2.1 Classifications des Systèmes d'équations intégrales

les Systèmes d'équations intégrales linéaires

Définition 2.2.2 *On appelle système d'équations intégrales linéaires un système d'équations ou l'inconnue U , apparait le signe \int et prend la forme suivante :*

$$U(x) = F(x) + \lambda \int_G K(x, t) U(t) dt \quad (2.2.1)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, et

$$U(x) = [u_i(x)], \quad i = 1, \dots, n.$$

$$F(x) = [f_i(x)], \quad i = 1, \dots, n.$$

$$K(x, t) = [k_{i,j}(x, t)], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Avec $F(x)$ et $K(x, t)$ sont deux fonctions connues, λ un paramètre numérique.

- Si $F(x) \neq 0$ le système (2.2.1) est dite Système d'équations intégrales non homogène.
- Si $F(x) = 0$ le système (2.2.1) est dite Système d'équations intégrales homogène.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher les fonctions U qui satisfait le système d'équation (2.2.1)

Et peut être écrite sous forme

$$U - AU = F \quad (2.2.2)$$

Avec $A = \int_a^b K(x, t) dt$.

2.2.2 Systèmes d'équations intégrales de Fredholm

Définition 2.2.3 • On appelle système d'équations intégrales linéaires de Fredholm de deuxième espèce non homogène un système de la forme

$$U(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (2.2.3)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, et

$$U(x) = [u_i(x)], \quad i = 1, \dots, n.$$

$$F(x) = [f_i(x)], \quad i = 1, \dots, n.$$

$$K(x, t) = [k_{i,j}(x, t)], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Si $F(x) = 0$ le système d'équations intégrales (2.2.3) s'écrit

$$U(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (2.2.4)$$

Est appelée système d'équations intégrales homogènes de Fredholm de seconde espèce.

Définition 2.2.4 • On appelle système d'équations intégrales linéaire non homogène de Fredholm de première espèce un système de la forme

$$\lambda \int_a^b K(x, t) U(t) dt = F(x) \quad (2.2.5)$$

Où la fonction inconnue $U(t)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle système d'équations intégrales de Fredholm non homogène de première espèce.

Si $F(x) = 0$ ce système d'équations intégrales est appelée système d'équations intégrales homogène de Fredholm de première espèce.

2.2.3 Système d'équations intégrales de Volterra

Définition 2.2.5 Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné et fermé de \mathbb{R} . (compact)

Les systèmes d'équations intégrales de Volterra est un cas particulier des systèmes d'équations intégrales de Fredholm

- On appelle système d'équations intégrales de Volterra du deuxième espèce, un système de la forme

$$U(x) = F(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) U(t) dt \quad (2.2.6)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, et

$$U(x) = [u_i(x)], \quad i = 1, \dots, n.$$

$$F(x) = [f_i(x)], \quad i = 1, \dots, n.$$

$$K(x, t) = [k_{i,j}(x, t)], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Si $F(x) = 0$ le système d'équations intégrales (2.2.6) devient :

$$U(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) U(t) dt \quad (2.2.7)$$

Est appelé système d'équations intégrales homogène de volterra de seconde espèce.

- On appelle système d'équations intégrales linéaires non homogène de volterra de premier espèce un système d'équations de la forme

$$\lambda \int_a^x K(x, t) U(t) dt = F(x) \quad (2.2.8)$$

Si $F(x) = 0$ ce système d'équations est appelé système d'équations intégrales homogène de volterra de première espèce.

2.3 Méthodes d'approximation pour les équations intégrales

Un grand nombre de méthodes fondées sur des principes différents ont été proposées et sont pratiquement utilisées pour la résolution numérique des systèmes d'équations intégrales. Dans cette partie on donne quelques méthodes d'approximation pour la résolution des équations intégrales.

2.3.1 Méthodes de projection

Définition 2.3.1 Soit X un espace vectoriel normé, et U un sous espace de X . Un opérateur borné

$P : X \longrightarrow Y$ est appelé projecteur s'il vérifie :

$$\forall u \in U, Pu = u, \quad u \in Y \quad (2.3.1)$$

Définition 2.3.2 (Méthodes de projection)

On se donne X et Y deux espaces de Banach, ainsi que $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur borné injectif. Pour $f \in A(X) \subset Y$, on cherche à approcher la solution du problème:

$$\text{trouver } u \in X \text{ tel que } Au = f \quad (2.3.2)$$

Pour se faire, on se donne une suite de sous espaces vectoriels $X_n \subset X$ et $Y_n \subset Y$ de dimension finie n , ainsi que des projecteurs $P_n : Y \longrightarrow Y_n$.

On considère le problème approché :

$$\text{trouver } u_n \in X_n \text{ tel que } P_n Au_n = P_n f \quad (2.3.3)$$

Cette méthode de projection est dite convergente s'il existe un rang n_0 à partir duquel pour tout $f \in A(X)$, l'équation approché (2.3.3) admet une unique solution $u_n \in X_n$ et que cette solution converge vers la solution u de (2.3.2), i.e $u_n \longrightarrow u$ si $n \longrightarrow +\infty$.

Cette condition de convergence peut s'exprimer simplement en fonction de l'opérateur $A_n = P_n A : X_n \longrightarrow Y_n$.

Elle signifie simplement qu'à partir d'un certain rang, cet opérateur est inversible, et que de plus, on a une convergence ponctuelle

$$A^{-1}(P_n f) = A^{-1}(P_n(Au)) = (P_n A)^{-1} P_n Au \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} u \quad (2.3.4)$$

2.3.2 Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'opérateur

$$u - Au = f \quad (2.3.5)$$

Elle consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (2.3.5) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X, n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C(G)$ ou de $L^2(G)$. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base de X_n . On cherche une fonction $u_n \in X_n$, de la forme

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x) \quad , x \in G \quad (2.3.6)$$

Pour déterminer les coefficients (c_j) , en substituant cette fonction dans l'équation (2.3.5), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} R_n(x) &= u_n(x) - \int_G K(x, t) u_n(t) dt - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_G K(x, t) \psi_j(t) dt \right\} - f(x), x \in G \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, (i.e, aux points de collocation)

Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_G K(x_i, t) \psi_j(t) dt \right\} c_j = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3.8)$$

de la forme $\Psi_n X = f_n$. Evidemment, ce système admet une solution unique si le det Ψ_n est

non nul, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

2.3.3 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est semblable à la précédente, sauf qu'elle demande des conditions optimales pour les fonctions $u_n \in X_n$. Plutôt que rechercher l'orthogonalité avec l'espace transformé \widehat{X}_n , on demande simplement l'orthogonalité avec l'espace X_n . Si on note P_n l'opérateur de projection sur X_n , ces conditions se traduisent simplement par la projection de l'équation (2.3.5):

$$u_n - P_n A u_n = P_n f \quad (2.3.9)$$

On peut expliciter les équations obtenues sur notre base v_i de X_n :

$$\begin{aligned} \forall i \quad & \in \quad \{1, \dots, n\}, \langle \widehat{u}_n - f, u_i \rangle = 0 \\ \iff & \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle u_n - A u_n - f, v_i \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

En recherche u_n par l'intermédiaire d'une combinaison linéaire comme en (2.3.9), ces équations se traduisent par le système :

$$\begin{bmatrix} \langle \widehat{u}_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle \widehat{u}_n, u_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \widehat{u}_1, u_n \rangle & \cdots & \langle \widehat{u}_n, u_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, u_n \rangle \end{bmatrix}$$

2.3.4 Méthode de Petrov-Galerkin

Il s'agit d'une méthode essentiellement Hilbertienne, c'est à dire qu'elle met en jeu la projection de notre équation dans un sous espace de dimension finie. Pour ce faire, soit X un espace d'Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on se donne une suite de sous espace $X_n \subset X$ de dimension finie. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base orthonormale de X_n , on cherche une fonction $u_n \in X_n$ de la forme (2.3.6) proche de la solution exacte du problème original.

Donc pour le problème (2.3.5), l'idée est de minimiser l'erreur

$$r_n = \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i - f \quad (2.3.11)$$

d'où on impose la condition d'orthogonalité suivante

$$\langle r_n, \psi_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i (I - A)\psi_i - f, \psi_j \right\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3.12)$$

ce qui implique

$$\left\langle \sum_{i=1}^n c_i (I - A)\psi_i, \psi_j \right\rangle - \langle f, \psi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3.13)$$

ou

$$\sum_{i=1}^n c_i \{ \langle \psi_i, \psi_j \rangle - \langle A\psi_i, \psi_j \rangle \} = \langle f, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3.14)$$

Ainsi, on obtient le système linéaire

$$c_j - \sum_{i=1}^n c_i \langle A\psi_i, \psi_j \rangle = \langle f, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3.15)$$

Chapitre 3

Résolution numérique des systèmes d'équations integrales

L'objectif de ce chapitre est de trouver une solution approchée des système d'équations intégrales de Fredholm et de Volterra de 2^{eme} espèce par deux méthodes : Colocation et Galerkin en utilisant les polynômes de Legendre.

3.1 Résolution numérique des systèmes d'équations intégrales par la méthode de collocation

Dans cette partie, nous cherchons une approximation numérique du système d'équations intégrales de Fredholm et de Volterra par la méthode de Collocation,

3.1.1 Aproximation numérique des systèmes d'équations intégrales de Fredholm

Considérons le système d'équations intégrales de Fredholm suivant :

$$U(x) = \mathbf{F}(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)U(t)dt, \quad (3.1.1)$$

$$\text{où } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et } x \in [a, b] ,$$

$$U(x) = [u_i(x)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1.2)$$

$$F(x) = [f_i(x)], \quad i = 1, \dots, n,$$

$$K(x, t) = [k_{i,j}(x, t)], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Où $f_i(x)$ des fonctions continues dans $[a, b]$, $k_{i,j}(x, t)$ des fonctions continues $\forall (x, t) \in [a; b]^2$. Nous convertissons ce système des équation en système des équations linéaires. Pour ce résultat nous avons besoin de quelques fonctions de base pour estimates la solution de systeme d'équations intégrales. De sort que, nous choisissons des polynômes de Legendre comme les fonctions de base.

Nous appliquons la méthode de collocation pour convertir l'équation (3.1.1) en un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. Pour cela, en utilise des polynômes de Legendre, nous approximons $u_i(x)$, tel que

$$u_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x), \quad (3.1.3)$$

Où $L_k(x)$ est le $k^{ième}$ polynômes de Legendre et c_{ik} sont des coefficients inconnus qui sont déterminés en résolvant le système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. En substituant la relation (3.1.3) dans (3.1.2), nous avons

$$\sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b k_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt,$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Nous choisissons des points de collocation tels que

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

qui sont équidistants, et définissons le système d'équations résiduelles par :

$$R_i(x) = \sum_{k=1}^n c_{ik} L_{k-1}(x) - f_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b k_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt,$$

Ensuite, en imposant les conditions

$$R_i(x_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

(Où x_j sont des points de collocation) au système d'équations résiduelles, on déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$.

Par exemple, pour $n = 2$ nous avons

$$\begin{cases} u_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b k_{11}(x, t) u_1(t) dt + \lambda \int_a^b k_{12}(x, t) u_2(t) dt, \\ u_2(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b k_{21}(x, t) u_1(t) dt + \lambda \int_a^b k_{22}(x, t) u_2(t) dt, \end{cases}$$

qui, après discrétisation, on obtient un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$ donné comme suit

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m, \\ b &= [f_1(x_1), f_1(x_2), \dots, f_1(x_m), f_2(x_1), f_2(x_2), \dots, f_2(x_m)]^T, \\ X &= [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}]^T, \end{aligned}$$

avec

$$a_{ij} = \begin{cases} L_{j-1}(x_i) - \lambda \int_a^b k_{11}(x_i, t) L_{j-1}(t) dt, & \begin{cases} i = 1; 2; \dots; m \\ j = 1; 2; \dots; m \end{cases} \\ - \int_a^b k_{12}(x_i, t) L_{j-m-1}(t) dt, & \begin{cases} i = 1; 2; \dots; m \\ j = m+1; \dots; 2m \end{cases} \\ - \int_a^b k_{21}(x_{i-m}, t) L_{j-1}(t) dt, & \begin{cases} i = m+1; \dots; 2m \\ j = 1; 2; \dots; m \end{cases} \\ L_{j-m-1}(x_{i-m}) - \lambda \int_a^b k_{22}(x_{i-m}, t) L_{j-m-1}(t) dt, & \begin{cases} i = m+1; \dots; 2m \\ j = m+1; \dots; 2m \end{cases} \end{cases}$$

3.1.2 Aproximation Numérique de système d'équations intégrales de Volterra

Considérons le système d'équations intégrales linéaires de Volterra suivant :

$$U(x) = F(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt, \quad (3.1.4)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, et $x \in [a, b]$, et

$$\begin{aligned} U(x) &= [u_i(x)], \quad i = 1, \dots, n, \\ F(x) &= [f_i(x)], \quad i = 1, \dots, n, \\ K(x, t) &= [k_{i,j}(x, t)], \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Nous appliquons la méthode de collocation pour convertir l'équation (3.1.4) en un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. Pour cela, en utilise des polynômes de Legendre, nous approximos $u_i(x)$, tel que

$$u_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x), \quad (3.1.6)$$

Où $L_k(x)$ est le $k^{ième}$ polynômes de Legendre et c_{ik} sont des coefficients inconnus qui sont déterminés en résolvant le système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. En substituant la relation (3.1.6) dans (3.1.4), nous avons

$$\sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^x k_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt, \\ i = 1, 2, \dots, n$$

Nous choisissons des points de collocation tels que

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Qui sont équidistants, et définissons le système d'équations résiduelles par :

$$R_i(x) = \sum_{k=1}^n c_{ik} L_{k-1}(x) - f_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^x k_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt,$$

Ensuite, en imposant les conditions

$$R_i(x_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

(Où x_j sont des points de collocation) au système d'équations résiduelles, on déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$.

Par exemple, pour $n = 2$ nous avons

$$\begin{cases} u_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^x k_{11}(x, t) u_1(t) dt + \lambda \int_a^x k_{12}(x, t) u_2(t) dt, \\ u_2(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^x k_{21}(x, t) u_1(t) dt + \lambda \int_a^x k_{22}(x, t) u_2(t) dt, \end{cases}$$

qui, après discrétisation, un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$ est calculée comme suit

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m, \\ b &= [f_1(x_1), f_1(x_2), \dots, f_1(x_m), f_2(x_1), f_2(x_2), \dots, f_2(x_m)]^T, \\ X &= [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}]^T, \end{aligned}$$

Nous obtenons le

$$a_{ij} = \begin{cases} L_{i-1}(x_i) - \lambda \int_a^{x_i} k_{11}(x_i, t) L_{j-1}(t) dt, & \begin{cases} i = 1; 2; \dots; m \\ j = 1; 2; \dots; m \end{cases} \\ \cdot - \lambda \int_a^{x_i} k_{12}(x_i, t) L_{j-m-1}(t) dt, & \begin{cases} i = 1; 2; \dots; m \\ j = m+1; \dots; 2m \end{cases} \\ -\lambda \int_a^{x_{i-m}} k_{21}(x_{i-m}, t) L_{j-1}(t) dt, & \begin{cases} i = m+1; \dots; 2m \\ j = 1; 2; \dots; m \end{cases} \\ L_{i-m-1}(x_{i-m}) - \lambda \int_a^{x_{i-m}} k_{22}(x_{i-m}, t) L_{j-m-1}(t) dt, & \begin{cases} i = m+1; \dots; 2m \\ j = m+1; \dots; 2m \end{cases} \end{cases}$$

3.2 Résolution des systèmes d'équations integrales par la méthode de Galerkin

Dans cette partie, nous voulons obtenir une approximation numérique de système d'équations intégrales de Fredholm et de Volterra par la méthode de Galerkin,

3.2.1 Aproximation Numérique de Système d'équations intégrales de Fredholm

Considérons le système d'équations intégrales de Fredholm suivant :

$$U(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (3.2.1)$$

ou $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in [a, b]$, et

$$U(x) = [u_i(x)], i = 1, \dots, n. \quad (3.2.2)$$

$$F(x) = [f_i(x)], i = 1, \dots, n.$$

$$K(x, t) = [k_{i,j}(x, t)], i, j = 1, \dots, n.$$

Où $f_i(x)$ des fonction continue dans $[a, b]$, $k_{i,j}(x, t)$ des fonctions continue $\forall (x, t) \in [a, b]^2$. Nous convertissons ce système des équation en système des équations linéaires. Pour ce résultat, nous avons besoin de quelques fonctions de base pour estimates la solution de systeme d'équations intégrales. De sort que, nous choisissons des polynômes de Legendre comme les fonctions de base.

Nous appliquons la méthode de Galerkin pour convertir le système (3.2.1) en un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. Pour cela, en utilise des polynômes de Legendre, nous approximations $u_i(x)$, tel que

$$u_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x), \quad (3.2.3)$$

Où $L_k(x)$ est le $k^{ième}$ polynômes de Legendre et c_{ik} , $i = 0, 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m$. sont des coefficients inconnus qui sont déterminés en résolvant le système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. En substituant la relation (3.2.3) dans (3.2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x) &= f_i(x) + \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^n K_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt \\ \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{ii}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(t) dt - \lambda \int_a^b \sum_{i \neq j=1}^n K_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt &= f_i(x) \\ \sum_{k=1}^m c_{ik} \left[L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] - \lambda \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \left[\int_a^b K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] &= f_i(x) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

En multipliant les deux côtés de (3.2.4) par L_{p-1} , $p = 1, 2, \dots, m$ et puis en intégrant de a à b , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m c_{ik} \int_a^b \left[L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \\ - \lambda \sum_{j \neq i}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \int_a^b \left[\int_a^b K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx = \int_a^b f_i(x) L_{p-1}(x) dx \end{aligned}$$

avec $i, j = 1, 2, \dots, n$ et $k, p = 1, 2, \dots, m$

On déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_a^b \left[L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt - \lambda \sum_{i \neq j=1}^n \int_a^b K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx, \\ i, j &= 1, \dots, n. \quad k, p = 1, \dots, m \\ b_i &= \int_a^b f_i(x) L_{p-1}(x) dx, \quad i = 1, \dots, n. \quad p = 1, \dots, m \\ X_i^t &= (c_{ik}), \quad i = 1, \dots, n. \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 2$

$$\begin{cases} u_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b k_{11}(x, t) u_1(t) dt + k_{12}(x, t) u_2(t) dt \\ u_2(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b k_{21}(x, t) u_1(t) dt + k_{22}(x, t) u_2(t) dt \end{cases}$$

$$u_1(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{1k} L_{k-1}(x), \quad \text{et} \quad u_2(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{2k} L_{k-1}(x),$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\int_a^b \left[L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{11} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] - \lambda \sum_{k=1}^m c_{2k} \left[\int_a^b \left[\int_a^b K_{12} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] \\ &= \int_a^b f_1(x) L_{p-1}(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\lambda \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\int_a^b \left[\int_a^b K_{21} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] + \sum_{k=1}^m c_{2k} \left[\int_a^b \left[L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{22} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] \\ &= \int_a^b f_2(x) L_{p-1}(x) dx \end{aligned}$$

$$p = 1, 2, \dots, m$$

Qui, après discrétisation, se réduit à un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$ comme suit :

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m. \\ X &= [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}]^T. \end{aligned}$$

$$b = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x) L_0(x) dx \\ \int_a^b f_1(x) L_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_1(x) L_{m-1}(x) dx \\ \int_a^b f_2(x) L_0(x) dx \\ \int_a^b f_2(x) L_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_2(x) L_{m-1}(x) dx \end{pmatrix},$$

Nous obtenons

$$a_{ij} = \begin{cases} \int_a^b \left[L_{j-1}(x) - \lambda \int_a^b k_{11}(x, t) L_{j-1}(t) dt \right] L_{i-1}(x) dx, & \begin{cases} i = 1; 2; \dots; m \\ j = 1; 2; \dots; m \end{cases} \\ -\lambda \int_a^b \left[\int_a^b k_{12}(x, t) L_{j-m-1}(t) dt \right] L_{i-1}(x) dx, & \begin{cases} i = 1; 2; \dots; m \\ j = m+1; \dots; 2m \end{cases} \\ -\lambda \int_a^b \left[\int_a^b k_{21}(x, t) L_{j-1}(t) dt \right] L_{i-m-1}(x) dx, & \begin{cases} i = m+1; \dots; 2m \\ j = 1; 2; \dots; m \end{cases} \\ \int_a^b \left[L_{j-m-1}(x) - \lambda \int_a^b k_{22}(x, t) L_{j-m-1}(t) dt \right] L_{i-m-1}(x) dx & \begin{cases} i = m+1; \dots; 2m \\ j = m+1; \dots; 2m \end{cases} \end{cases}$$

3.2.2 Aproximation Numérique des système d'équations intégrales de Volterra

Considérons le système d'équations intégrales de Volterra suivant :

$$U(x) = F(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) U(t) dt \quad (3.2.5)$$

ou $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in [a, b]$, et

$$U(x) = [u_i(x)], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2.6)$$

$$F(x) = [f_i(x)], \quad i = 1, \dots, n.$$

$$K(x, t) = [k_{i,j}(x, t)], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Nous appliquons la méthode de Galerkin pour transformer le système (3.2.5) en un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. Pour cela, en utilise des polynômes de Legendre, nous approximonons $u_i(x)$, tel que

$$u_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x), \quad (3.2.7)$$

Où $L_k(x)$ est le $k^{ième}$ polynômes de Legendre et c_{ik} , $i = 0, 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m$.

sont des coefficients inconnus qui sont déterminés en résolvant le système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. En substituant la relation (3.2.7) dans (3.2.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x \sum_{j=1}^n K_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt = f_i(x) \\ & \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{ii}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(t) dt - \lambda \int_a^x \sum_{i \neq j=1}^n K_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt = f_i(x) \\ & \sum_{k=1}^m c_{ik} [L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt] - \lambda \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} [\int_a^x K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt] = f_i(x) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

En multipliant les deux côtés de (3.2.8) par L_{p-1} , $p = 1, 2, \dots, n$ et puis en intégrant les deux côtés de a à b , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m c_{ik} \int_a^b [L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt] L_{p-1}(x) dx \\ & - \lambda \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \int_a^b [\int_a^x K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt] L_{p-1}(x) dx = \int_a^b f_i(x) L_{p-1}(x) dx \end{aligned}$$

où, $i, j = 1, 2, \dots, n$ et $k, p = 1, 2, \dots, m$.

on déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$.

$$A_{ij} = \int_a^b \left[L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt - \lambda \sum_{i \neq j=1}^n \int_a^x K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx,$$

$$\begin{aligned} & i, j = 1, \dots, n. \quad k, p = 1, \dots, m \\ & b_i = \int_a^b f_i(x) L_{p-1}(x) dx, \quad i = 1, \dots, n. \quad p = 1, \dots, m \\ & X_i^t = (c_{ik}), \quad i = 1, \dots, n. \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 2$

$$\begin{cases} u_1(x) + \lambda \int_a^x k_{11}(x, t) u_1(t) dt + \lambda \int_a^x k_{12}(x, t) u_2(t) dt = f_1(x) \\ u_2(x) + \lambda \int_a^x k_{21}(x, t) u_1(t) dt + \lambda \int_a^x k_{22}(x, t) u_2(t) dt = f_2(x) \end{cases}$$

$$u_1(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{1k} L_{k-1}(x), \quad \text{et} \quad u_2(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{2k} L_{k-1}(x),$$

$$\sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\int_a^b \left[L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{11} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] - \lambda \sum_{k=1}^m c_{2k} \left[\int_a^b \left[\int_a^x K_{12} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right]$$

$$= \int_a^b f_1(x) L_{p-1}(x) dx$$

$$- \lambda \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\int_a^b \left[\int_a^x K_{21} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] + \sum_{k=1}^m c_{2k} \left[\int_a^b \left[L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{22} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right]$$

$$= \int_a^b f_2(x) L_{p-1}(x) dx$$

$$p, k = 1, 2, 3$$

qui est un système d'équations linéaires $AX = b$ où :

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m,$$

$$X = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}]^T,$$

$$b = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x) L_0(x) dx \\ \int_a^b f_1(x) L_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_1(x) L_{m-1}(x) dx \\ \int_a^b f_2(x) L_0(x) dx \\ \int_a^b f_2(x) L_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_2(x) L_{m-1}(x) dx \end{pmatrix},$$

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b [L_{j-1}(x) + \lambda \int_a^x k_{11}(x, t) L_{j-1}(t) dt] L_{i-1}(x) dx , \\ \int_a^b [\lambda \int_a^x k_{12}(x, t) L_{j-m-1}(t) dt] L_{i-1}(x) dx , \\ \int_a^b [\lambda \int_a^x k_{21}(x, t) L_{j-1}(t) dt] L_{i-m-1}(x) dx , \\ \int_a^b [L_{j-m-1}(x) + \lambda \int_a^x k_{22}(x, t) L_{j-m-1}(t) dt] L_{i-m-1}(x) dx \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} i = 1; 2; \dots ; m \\ j = 1; 2; \dots ; m \\ i = 1; 2; \dots ; m \\ j = m + 1; \dots ; 2m \\ i = m + 1; \dots ; 2m \\ j = 1; 2; \dots ; m \\ i = m + 1; \dots ; 2m \\ j = m + 1; \dots ; 2m \end{array} \right.$$

3.3 Exemples

Résolution numérique de quelques exemples des systemes d'équations intégrales de fredholm :

Exemple 1. [15]

Soit le systeme des equations intégrales de Fredholme suivant

$$\begin{cases} u_1(x) = \frac{2}{3}e^x - \frac{1}{4} + \int_0^1 (\frac{1}{3}e^x t u_1(t) + t^2 u_2(t)) dt, \\ u_2(x) = \frac{3}{2}x - x^2 + \int_0^1 (x^2 e^{-t} u_1(t) - x u_2(t)) dt, \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = e^x$ et $u_2(x) = x$.

La solutions approchée $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_{1_exct}	$err_colocat$	err_Galerk	u_{2_exct}	$err_colocat$	err_Galerk
0.0	1.00000	1.643344e-04	1.894077e-03	0.00000	2.320894e-05	2.641116e-16
0.2	1.22140	1.708060e-04	4.726589e-04	0.20000	5.186709e-05	1.110223e-16
0.4	1.49182	1.756957e-04	2.369823e-04	0.40000	5.475073e-05	5.551115e-17
0.6	1.82212	1.791317e-04	2.670545e-04	0.60000	3.185988e-05	3.330669e-16
0.8	2.22554	1.812520e-04	4.783397e-04	0.80000	1.680547e-05	6.661338e-16
1.0	2.71828	1.822043e-04	2.015983e-03	1.00000	9.124532e-05	1.110223e-15

Tableau 3.3.1 : Comparaison entre l'erreure de la methode de colocation et l'erreure de la methode de Galerkin de l'exemple 1 pour $m = 10$

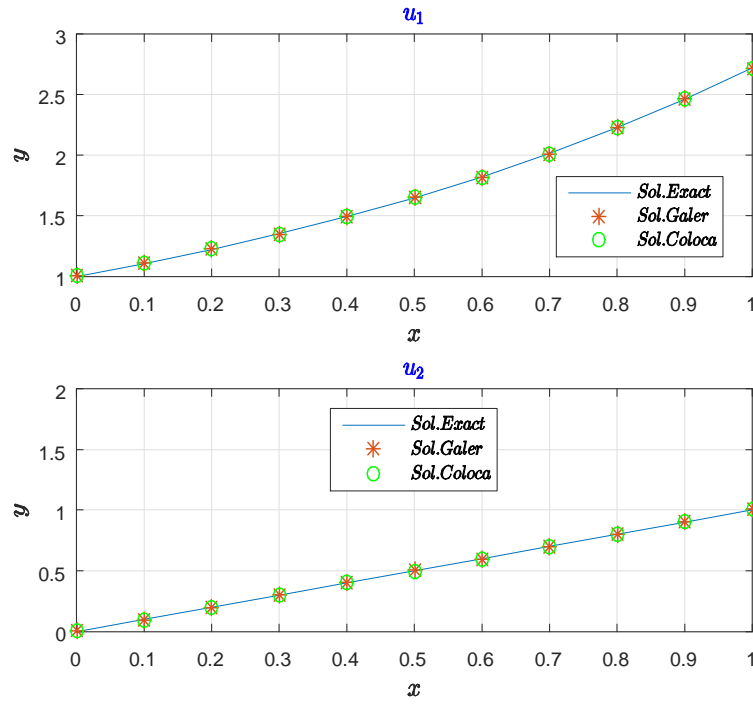


Figure 3.3.1 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 1 pour $n = 10$

Exemple 2. [15]

$$\begin{cases} u_1(x) = \frac{1}{18}x + \frac{17}{36} + \int_0^1 \frac{x+t}{3}(u_1(t) + u_2(t))dt, \\ u_2(x) = x^2 - \frac{19}{12}x + 1 + \int_0^1 xt(u_1(t) + u_2(t))dt, \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = 1 + x$ et $u_2(x) = 1 + x^2$.

La solution approchée de $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenue par la résolution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exact	$err_colocat$	$err_Galerkin$	u_2_exact	$err_colocat$	$err_Galerkin$
0.0	1.00000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.00000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.2	1.20000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.04000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.4	1.40000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.16000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.6	1.60000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.36000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.8	1.80000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.64000	0.000000e+00	0.000000e+00
1.0	2.00000	0.000000e+00	0.000000e+00	2.00000	0.000000e+00	0.000000e+00

Tableau 3.3.2 : Comparaison entre l'erreur de la methode de collocation et l'erreur de la methode de Galerkin de l'exemple 2 pour $m = 10$

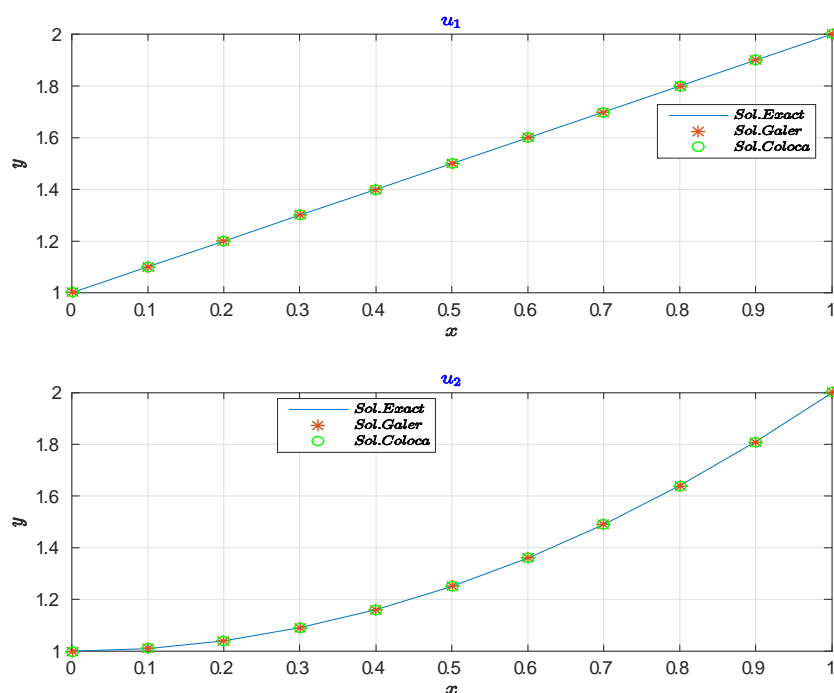


Figure 3.3.2 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 2 pour $n = 10$

Exemple 3. [15]

$$\begin{cases} u_1(x) = -\frac{47}{30} + 2x + \frac{17}{12}x^2 + x^3 + \int_0^1 (2t^2 - x^2)(u_1(t) + u_2(t))dt, \\ u_2(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{121}{60}x^2 + \int_0^1 3x^2t(u_1(t) + u_2(t))dt, \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = x^3 + 2x$ et $u_2(x) = x^2 - \frac{x}{3}$

La solution approchée de $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exct	$err_colocat$	$err_Galerkin$	u_2_exct	$err_colocat$	$err_Galerkin$
0.0	0.00000	0.000000e+00	0.000000e+00	0.00000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.2	0.40800	5.551115e-17	5.551115e-17	-0.02667	1.387779e-17	1.387779e-17
0.4	0.86400	0.000000e+00	0.000000e+00	0.02667	2.775558e-17	2.775558e-17
0.6	1.41600	2.220446e-16	2.220446e-16	0.16000	2.775558e-17	2.775558e-17
0.8	2.11200	8.881784e-16	8.881784e-16	0.37333	1.665335e-16	1.665335e-16
1.0	3.00000	4.440892e-16	4.440892e-16	0.66667	1.110223e-16	1.110223e-16

Tableau 3.3.3 : Comparaison entre l'erreur de la methode de collocation et l'erreur de la methode de Galerkin de l'exemple 3 pour $m = 10$

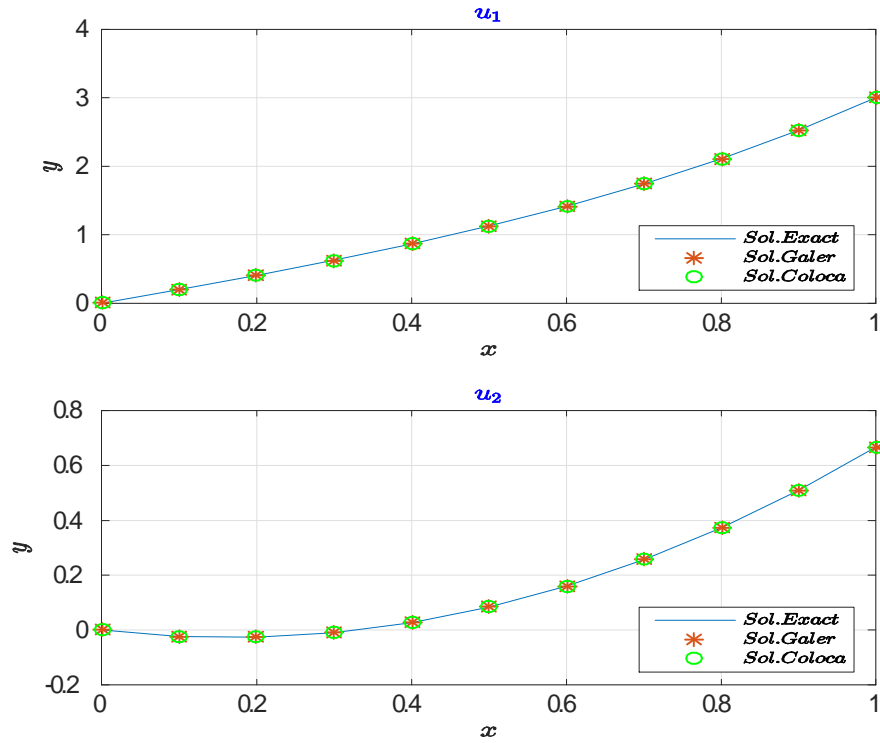


Figure 3.3.3 : Comparaison entre les solutions aprochés et la solution exacte de l'exemple 3 pour $n = 10$

Résolution numérique de quelques exemples de systeme d'équations intégrales de Volterra :

Exemple 4. [14]

$$\begin{cases} u_1(x) = -\frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x + \int_0^x (x^2 - t)(u_1(t) + u_2(t))dt, \\ u_2(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \int_0^x x(u_1(t) + u_2(t))dt, \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = x$ et $u_2(x) = x^2$.

La solution approché de $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exact	$err_colocat$	$err_Galerkin$	u_2_exact	$err_colocat$	$err_Galerkin$
0.0	0.00000	1.408161e-16	0.000000e+00	0.00000	2.775558e-16	0.000000e+00
0.2	0.20000	3.330669e-16	0.000000e+00	0.04000	1.387779e-16	2.775558e-17
0.4	0.40000	5.551115e-17	0.000000e+00	0.16000	1.110223e-16	0.000000e+00
0.6	0.60000	1.110223e-16	0.000000e+00	0.36000	2.220446e-16	0.000000e+00
0.8	0.80000	3.330669e-16	0.000000e+00	0.64000	1.110223e-16	0.000000e+00
1.0	1.00000	5.551115e-16	0.000000e+00	1.00000	4.440892e-16	0.000000e+00

Tableau 3.3.4 : Comparaison entre l'erreur de la methode de colocation et l'erreur de la methode de Galerkin de l'exemple 4 pour $m = 10$

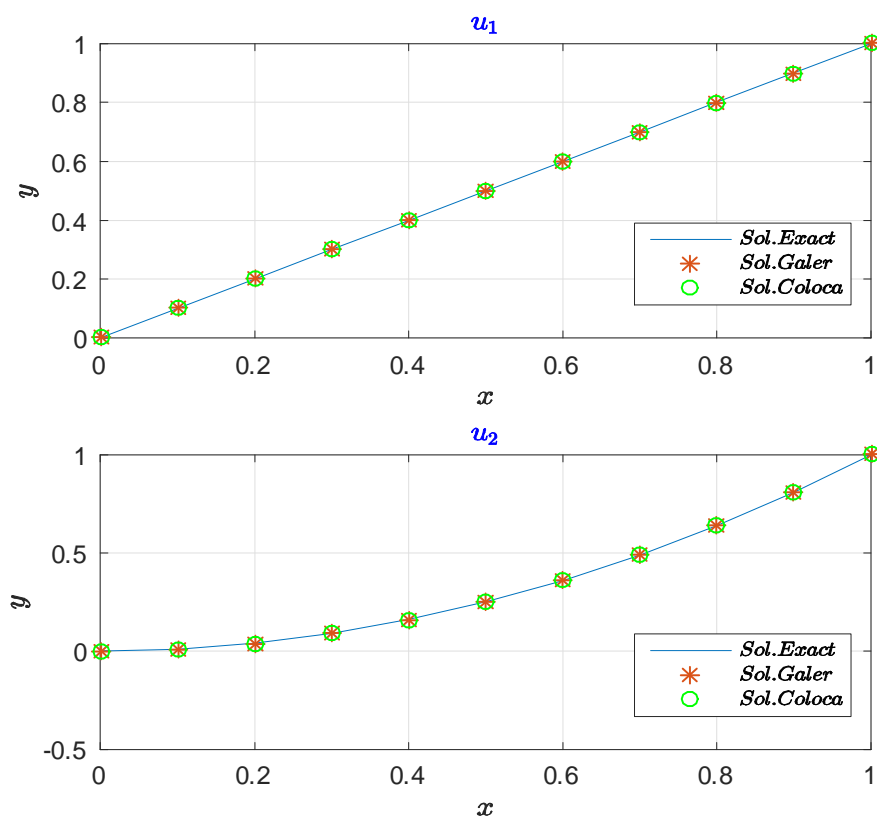


Figure 3.3.4 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 4 pour $n = 10$

Exemple 5. [14]

$$\begin{cases} u_1(x) = \cosh(x) + x \sin(x) - \int_0^x e^{x-t} u_1(t) dt - \int_0^x \cos(t-x) u_2(t) dt, \\ u_2(x) = 2 \sin(x) + x(\sin^2(x) + e^x) - \int_0^x e^{x+t} u_1(t) dt - \int_0^x x \cos(t) u_2(t) dt, \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = e^{-x}$ et $u_2(x) = 2 \sin(x)$.

La solution approché de $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exct	$err_colocat$	$err_Galerkin$	u_2_exct	$err_colocat$	$err_Galerkin$
0.0	1.00000	1.998401e-15	0.000000e+00	0.00000	1.068590e-15	0.000000e+00
0.2	0.81873	8.881784e-15	5.551115e-17	0.39734	4.163336e-15	1.387779e-17
0.4	0.67032	7.105427e-15	0.000000e+00	0.77884	9.992007e-16	2.775558e-17
0.6	0.54881	4.662937e-15	2.220446e-16	1.12928	2.220446e-16	2.775558e-17
0.8	0.44933	1.609823e-15	8.881784e-16	1.43471	6.661338e-16	1.665335e-16
1.0	0.36788	1.199041e-14	4.440892e-16	1.68294	2.953193e-14	1.110223e-16

Tableau 3.3.5 : Comparaison entre l'erreure de la methode de colocation et l'erreure de la methode de Galerkin de l'exemple 5 pour $m = 10$

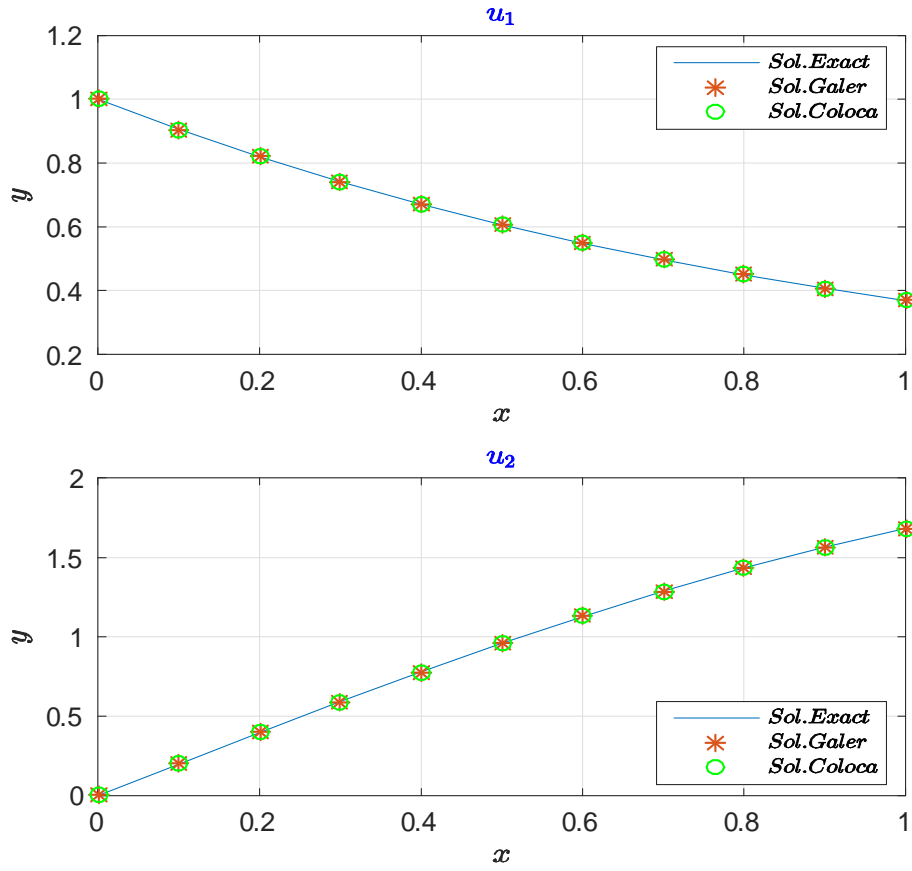


Figure 3.3.5 : Comparaison entre la solution aprochée et la solution exacte de l'exemple 5
pour $n = 10$

Exemple 6. [14]

$$\begin{cases} u_1(x) = -\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1 + \int_0^x (x-t)^3 u_1(t) dt + \int_0^x (x-t)^2 u_2(t) dt \\ u_2(x) = -\frac{1}{420}x^7 - \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x + 1 + \int_0^x (x-t)^4 u_1(t) dt + \int_0^x (x-t)^3 u_2(t) dt \end{cases}$$

où les solutions exactes sont : $u_1(x) = x^2 + 1$ et $u_2(x) = 1 + x - x^3$

La solution approché de $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenu par la solution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exact	$err_colocat$	$err_Galerkin$	u_2_exact	$err_colocat$	$err_Galerkin$
0.0	1.00000	4.440892e-16	0.000000e+00	1.00000	2.886580e-15	0.000000e+00
0.2	1.04000	2.220446e-16	0.000000e+00	1.19200	4.440892e-16	2.220446e-16
0.4	1.16000	2.220446e-16	0.000000e+00	1.33600	2.220446e-16	2.220446e-16
0.6	1.36000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.38400	6.661338e-16	0.000000e+00
0.8	1.64000	4.440892e-16	0.000000e+00	1.28800	4.440892e-16	2.220446e-16
1.0	2.00000	4.440892e-16	0.000000e+00	1.00000	2.664535e-15	0.000000e+00

Tableau 3.3.6 : Comparaison entre l'erreur de la methode de colocation et l'erreur de la methode de Galerkin de l'exemple 6 pour $m = 10$

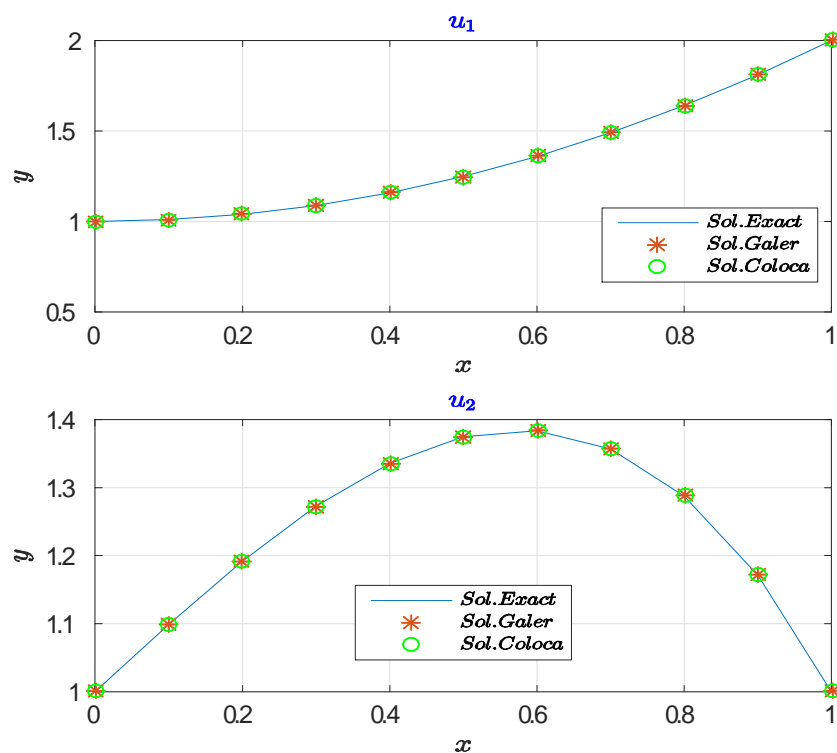


Figure 3.3.6 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 6 pour $n = 10$

Chapitre 4

Résolution numérique des systèmes d'équations intégral-différentielles.

L'objectif de ce chapitre est la recherche des solutions approchées des systèmes d'équations intégral-différentielles de Fredholm et de Volterra de 2^{ème} espèce par les deux méthodes utilisées auparavant dans le chapitre 3, à savoir la méthode de collocation et la méthode de Galerkin en utilisant les polynômes de Legendre. On termine ce chapitre par des exemples illustratifs, en comparant pour chaque exemple la solution exacte avec la solution approchée pour les deux méthodes.

4.1 Résolution des systèmes d'équations intégral-différentielles par la méthode de Collocation

Dans cette partie, nous donnons une approximation numérique des systèmes d'équations intégral-différentielles de Fredholm et de Volterra par la méthode de Collocation,

4.1.1 Approximation numérique des systèmes d'équations intégral-différentielles de Fredholm

- Considérons le système d'équations Intégral-différentielles de Fredholm suivant :

$$\alpha(x)U'''(x) + \beta(x)U'(x) + \gamma(x)U(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)U(t)dt = F(x). \quad (4.1.1)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in [a, b]$,

$$U(x) = [u_i(x)], \quad i = 1, \dots, n,$$

$$U'(x) = [u'_i(x)], \quad i = 1, \dots, n,$$

$$U''(x) = [u''_i(x)], \quad i = 1, \dots, n,$$

$$F(x) = [f_i(x)], \quad i = 1, \dots, n,$$

$$K(x, t) = [k_{i,j}(x, t)], \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Où $f_i(x)$ sont des fonctions continues dans $[a, b]$, $k_{i,j}(x, t)$ sont des fonctions continues $\forall (x, t) \in [a, b]^2$. Nous transformons ce système d'équations en un système d'équations linéaires. Pour cela nous avons besoin de quelques fonctions de base pour estimer la solution du système d'équations intégral-différentielles. De sorte que, nous choisissons des polynômes de Legendre comme les fonctions de base.

Nous appliquons la méthode de collocation pour transformer l'équation (4.1.1) en un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. Pour cela, en utilisant des polynômes de Legendre, posons

$$u_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x), \quad (4.1.2)$$

$$u'_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(x), \quad (4.1.3)$$

$$u''_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L''_{k-1}(x), \quad (4.1.4)$$

Où $L_k(x)$ est le $k^{ième}$ polynôme de Legendre et c_{ik} sont des coefficients inconnus qui sont déterminés en résolvant le système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. En substituant les relations (4.1.2), (4.1.3) et (4.1.4) dans (4.1.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \alpha(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L''_{k-1}(x) + \beta(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(x) + \gamma(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x) \\
 & \quad - \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^n K_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt = f_i(x) \\
 & \sum_{k=1}^m c_{ik} \left[\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] \\
 & \quad - \lambda \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \left[\int_a^b K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] = f_i(x)
 \end{aligned}$$

Nous choisissons des points de collocation tels que

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

qui sont équidistants, et définissons le système d'équations résiduelles par :

$$\begin{aligned}
 R_i(x) = & \sum_{k=1}^m c_{ik} \left[\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] - f_i(x) \\
 & - \lambda \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \left[\int_a^b K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right]
 \end{aligned}$$

Ensuite, en imposant les conditions

$$R_i(x_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

(Où x_j sont des points de collocation) au système d'équations résiduelles, on déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. avec les conditions initiales suivantes

:

$$u_i(a) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(a) = a_i, \quad u'_i(a) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(a) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

on déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$.

Par exemple, pour $n = 2$ nous avons

$$\begin{cases}
 \alpha(x) u''_1(x) + \beta(x) u'_1(x) + \gamma(x) u_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b k_{11}(x, t) u_1(t) dt + k_{12}(x, t) u_2(t) dt \\
 \alpha(x) u''_2(x) + \beta(x) u'_2(x) + \gamma(x) u_2(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b k_{21}(x, t) u_1(t) dt + k_{22}(x, t) u_2(t) dt
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \alpha(x) u''_1(x) + \beta(x) u'_1(x) + \gamma(x) u_1(x) - \lambda \int_a^b k_{11}(x, t) u_1(t) dt - \lambda \int_a^b k_{12}(x, t) u_2(t) dt - f_1(x) = 0 \\
 \alpha(x) u''_2(x) + \beta(x) u'_2(x) + \gamma(x) u_2(x) - \lambda \int_a^b k_{21}(x, t) u_1(t) dt - \lambda \int_a^b k_{22}(x, t) u_2(t) dt - f_2(x) = 0
 \end{cases}$$

$$u_s^{(r)}(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{sk} L_{k-1}^{(r)}(x), \quad \text{avec } s = 1, 2 \text{ et } r = 0, 1, 2$$

Ensuite, en imposant les conditions

$$R_1(x_j) = 0, \quad R_2(x_j) = 0, \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots, m,$$

on obtient un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$ comme suit

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m,$$

$$b = [a_1, b_1, f_1(x_3), \dots, f_1(x_m), a_2, b_2, f_2(x_3), \dots, f_2(x_m)]^T,$$

$$X = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}]^T,$$

$$\text{où } a_{ij} = \begin{pmatrix} L_0(a) & L_1(a) & \cdots & L_{m-1}(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_0(a) & L'_1(a) & \cdots & L'_{m-1}(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & \cdots & A_{3,m} & A_{3,m+1} & A_{3,m+2} & \cdots & A_{3,2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & \cdots & A_{m,2m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_0(a) & L_1(a) & \cdots & L_{m-1}(a) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L'_0(a) & L'_1(a) & \cdots & L'_{m-1}(a) \\ A_{m+3,1} & A_{m+3,2} & \cdots & A_{m+3,m} & A_{m+3,m+1} & A_{m+3,m+2} & \cdots & A_{m+3,m+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2m,1} & A_{2m,2} & \cdots & A_{2m,m} & A_{2m,m+1} & A_{2m,m+2} & \cdots & A_{2m,2m} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} L_{j-1}(a) , & \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 1; 2; \dots ; m \end{array} \right. \\ L'_{j-1}(a) , & \left\{ \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 1; 2; \dots ; m \end{array} \right. \\ \alpha(x_i)L''_{j-1}(x_i) + \beta(x_i)L'_{j-1}(x_i) + \gamma(x_i)L_{j-1}(x_i) \\ \quad - \lambda \int_a^b k_{11}(x_i, t)L_{j-1}(t)dt, & \left\{ \begin{array}{l} i = 3; \dots ; m \\ j = 1; 2; \dots ; m \end{array} \right. \\ -\lambda \int_a^b k_{12}(x_i, t)L_{j-m-1}(t)dt , & \left\{ \begin{array}{l} i = 3; \dots ; m \\ j = m+1; \dots ; 2m \end{array} \right. \\ -\lambda \int_a^b k_{21}(x_{i-m-1}, t)L_{j-1}(t)dt , & \left\{ \begin{array}{l} i = m+3; \dots ; 2m \\ j = 1; 2; \dots ; m \end{array} \right. \\ L_{j-m-1}(a) , & \left\{ \begin{array}{l} i = m+1 \\ j = m+1; \dots ; 2m \end{array} \right. \\ L'_{j-m-1}(a) , & \left\{ \begin{array}{l} i = m+2 \\ j = m+1; \dots ; 2m \end{array} \right. \\ \alpha(x_{i-m-1})L''_{j-m-1}(x_{i-m-1}) + \beta(x_{i-m-1})L'_{j-m-1}(x_{i-m-1}) + \gamma(x_{i-m-1}) \\ \quad L_{j-m-1}(x_{i-m-1}) - \lambda \int_a^b k_{22}(x_{i-m-1}, t)L_{j-m-1}(t)dt & \left\{ \begin{array}{l} i = m+1; \dots ; 2m \\ j = m+1; \dots ; 2m \end{array} \right. \end{array} \right.$$

4.1.2 Aproximation numérique des systèmes d'équations intégro-différentielles de Volterra

Considérons le système d'équations Intégro-différentielles de Volterra suivant :

$$\alpha(x)U''(x) + \beta(x)U'(x) + \gamma(x)U(x) - \lambda \int_a^x K(x, t) U(t)dt = F(x). \quad (4.1.5)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
 U(x) &= [u_i(x)], & i &= 1, \dots, n, \\
 U'(x) &= [u'_i(x)], & i &= 1, \dots, n, \\
 U''(x) &= [u''_i(x)], & i &= 1, \dots, n, \\
 F(x) &= [f_i(x)], & i &= 1, \dots, n, \\
 K(x, t) &= [k_{i,j}(x, t)], & i, j &= 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Nous appliquons la méthode de Colocation pour transformer l'équation (4.1.5) en un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. Pour cela, en utilise des polynômes de Legendre, nous approximations $u_i(x)$, $u'_i(x)$ et $u''_i(x)$ tel que

$$u_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x), \quad (4.1.6)$$

$$u'_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(x), \quad (4.1.7)$$

$$u''_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L''_{k-1}(x), \quad (4.1.8)$$

Où $L_k(x)$ est le $k^{ième}$ polynômes de Legendre et c_{ik} sont des coefficients inconnus qui sont déterminés en résolvant le système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. En substituant les relations (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.8) dans (4.1.5), nous avons

$$\begin{aligned}
 &\alpha(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L''_{k-1}(x) + \beta(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(x) + \gamma(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x) \\
 &\quad - \lambda \int_a^x \sum_{j=1}^n K_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt = f_i(x)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^m c_{ik} [\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt]$$

$$-\lambda \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \left[\int_a^x K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] = f_i(x)$$

Maintenant, nous choisissons des points de collocation tels que

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Qui sont équidistants, et définissons le système d'équations résiduelles par :

$$R_i(x) = \sum_{k=1}^m c_{ik} \left[\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] - f_i(x)$$

$$-\lambda \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \left[\int_a^x K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right]$$

Ensuite, en imposant les conditions

$$R_i(x_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

(Où x_j sont des points de collocation) au système d'équations résiduelles, on déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. avec ces conditions initiales suivant :

$$u_i(a) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(a) = a_i, \quad u'_i(a) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(a) = b_i$$

on déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$.

Par exemple, pour $n = 2$ nous avons

$$\begin{cases} \alpha(x) u''_1(x) + \beta(x) u'_1(x) + \gamma(x) u_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^x k_{11}(x, t) u_1(t) dt + k_{12}(x, t) u_2(t) dt \\ \alpha(x) u''_2(x) + \beta(x) u'_2(x) + \gamma(x) u_2(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^x k_{21}(x, t) u_1(t) dt + k_{22}(x, t) u_2(t) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(x) u''_1(x) + \beta(x) u'_1(x) + \gamma(x) u_1(x) - \lambda \int_a^x k_{11}(x, t) u_1(t) dt - \lambda \int_a^x k_{12}(x, t) u_2(t) dt - f_1(x) = 0 \\ \alpha(x) u''_2(x) + \beta(x) u'_2(x) + \gamma(x) u_2(x) - \lambda \int_a^x k_{21}(x, t) u_1(t) dt - \lambda \int_a^x k_{22}(x, t) u_2(t) dt - f_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$u_s^{(r)}(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{sk} L_{k-1}^{(r)}(x), \quad \text{avec } s = 1, 2 \text{ et } r = 0, 1, 2$$

Ensuite, en imposant les conditions

$$R_1(x_j) = 0, \quad R_2(x_j) = 0, \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots, m,$$

après discrétisation, un système algébrique d'équations linéaires $Ax = b$ comme suit

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m, \\ b &= [a1, b1, f_1(x_3), \dots, f_1(x_m), a2, b2, f_2(x_3), \dots, f_2(x_m)]^T, \\ X &= [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}]^T, \end{aligned}$$

où $a_{ij} =$

$$\begin{pmatrix} L_0(a) & L_1(a) & \cdots & L_{m-1}(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_0(a) & L'_1(a) & \cdots & L'_{m-1}(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & \cdots & A_{3,m} & A_{3,m+1} & A_{3,m+2} & \cdots & A_{3,2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & \cdots & A_{m,2m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_0(a) & L_1(a) & \cdots & L_{m-1}(a) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L'_0(a) & L'_1(a) & \cdots & L'_{m-1}(a) \\ A_{m+3,1} & A_{m+3,2} & \cdots & A_{m+3,m} & A_{m+3,m+1} & A_{m+3,m+2} & \cdots & A_{m+3,m+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2m,1} & A_{2m,2} & \cdots & A_{2m,m} & A_{2m,m+1} & A_{2m,m+2} & \cdots & A_{2m,2m} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} L_{j-1}(a) \ , \\ L'_{j-1}(a) \ , \\ \alpha(x_i)L''_{j-1}(x_i) + \beta(x_i)L'_{j-1}(x_i) + \gamma(x_i)L_{j-1}(x_i) \\ \quad - \lambda \int_a^x k_{11}(x_i, t)L_{j-1}(t)dt, \\ -\lambda \int_a^x k_{12}(x_i, t)L_{j-m-1}(t)dt \ , \\ -\lambda \int_a^x k_{21}(x_{i-m-1}, t)L_{j-1}(t)dt \ , \\ L_{j-m-1}(a) \ , \\ L'_{j-m-1}(a) \ , \\ \alpha(x_{i-m-1})L''_{j-m-1}(x_{i-m-1}) + \beta(x_{i-m-1})L'_{j-m-1}(x_{i-m-1}) + \gamma(x_{i-m-1}) \\ \quad L_{j-m-1}(x_{i-m-1}) - \lambda \int_a^x k_{22}(x_{i-m-1}, t)L_{j-m-1}(t)dt, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 1; 2; \dots ; m \\ i = 2 \\ j = 1; 2; \dots ; m \\ i = 3; \dots ; m \\ j = 1; 2; \dots ; m \\ i = 3; \dots ; m \\ j = m+1; \dots ; 2m \\ i = m+3; \dots ; 2m \\ j = 1; 2; \dots ; m \\ i = m+1 \\ j = m+1; \dots ; 2m \\ i = m+2 \\ j = m+1; \dots ; 2m \\ i = m+1; \dots ; 2m \\ j = m+1; \dots ; 2m \end{array} \right.$$

4.2 Résolution des systèmes d'équations Intégral-différentielles par la méthode de Galerkin

Dans cette partie, nous cherchons une approximation numérique des systèmes d'équations intégral-différentielles de Fredholm et de Volterra par la méthode de Galerkin,

4.2.1 Aproximation Numérique de Système d'équations intégral-différentielles de Fredholm

- Considérons le système d'équations Intégral-différentielles de Fredholm suivant :

$$\alpha(x)U''(x) + \beta(x)U'(x) + \gamma(x)U(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)U(t)dt = F(x) \quad (4.2.1)$$

$$\text{ou } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x \in [a, b] \quad ,$$

$$\begin{aligned} U(x) &= [u_i(x)], \quad i = 1, \dots, n, \\ U'(x) &= [u'_i(x)], \quad i = 1, \dots, n, \\ U''(x) &= [u''_i(x)], \quad i = 1, \dots, n, \\ F(x) &= [f_i(x)], \quad i = 1, \dots, n, \\ K(x, t) &= [k_{i,j}(x, t)], \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Où $f_i(x)$ sont des fonction continues dans $[a, b]$, $k_{i,j}(x, t)$ sont des fonctions continues $\forall (x, t) \in [a; b]^2$. Nous transformons ce système d'équation en un système d'équations linéaires. Pour cela, nous choisissons les polynômes de Legendre comme les fonctions de base pour estimer la solution du système d'équations Intégral-différentielles. Nous appliquons la méthode de Galerkin pour transformer le système (4.2.1) en un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. posons

$$u_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x), \quad (4.2.2)$$

$$u'_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(x), \quad (4.2.3)$$

$$u''_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L''_{k-1}(x), \quad (4.2.4)$$

où $L_k(x)$ est le $k^{ième}$ polynômes de Legendre et c_{ik} sont des coefficients inconnus qui sont déterminés en résolvant le système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. En substituant les relations (4.2.2), (4.2.3) et (4.2.4) dans (4.2.1), nous obtenons :

$$\alpha(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L''_{k-1}(x) + \beta(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(x) + \gamma(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x)$$

$$-\lambda \int_a^b \sum_{j=1}^n K_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt = f_i(x)$$

$$\sum_{k=1}^m c_{ik} \left[\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right]$$

$$-\lambda \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \left[\int_a^b K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] = f_i(x) \quad (4.2.5)$$

En multipliant les deux côtés de (4.2.5) par L_{p-1} , $p = 1, 2, \dots, n$, puis en intégre de a à b , nous aurons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m c_{ik} \int_a^b \left[\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \\ - \lambda \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \int_a^b \left[\int_a^b K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx = \int_a^b f_i(x) L_{p-1}(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{avec } i, j = 1, 2, \dots, n \quad \text{et} \quad k, p = 1, 2, \dots, m$$

$$u_i(a) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(a) = a_i, \quad u'_i(a) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(a) = b_i$$

on déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$.

Par exemple, pour $n = 2$,

$$\begin{cases} \alpha(x) u''_1(x) + \beta(x) u'_1(x) + \gamma(x) u_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b k_{11}(x, t) u_1(t) dt + k_{12}(x, t) u_2(t) dt \\ \alpha(x) u''_2(x) + \beta(x) u'_2(x) + \gamma(x) u_2(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b k_{21}(x, t) u_1(t) dt + k_{22}(x, t) u_2(t) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(x) u''_1(x) + \beta(x) u'_1(x) + \gamma(x) u_1(x) - \lambda \int_a^b k_{11}(x, t) u_1(t) dt - \lambda \int_a^b k_{12}(x, t) u_2(t) dt = f_1(x) \\ \alpha(x) u''_2(x) + \beta(x) u'_2(x) + \gamma(x) u_2(x) - \lambda \int_a^b k_{21}(x, t) u_1(t) dt - \lambda \int_a^b k_{22}(x, t) u_2(t) dt = f_2(x) \end{cases}$$

$$u_s^{(r)}(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{sk} L_{k-1}^{(r)}(x), \quad \text{avec } s = 1, 2 \text{ et } r = 0, 1, 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\alpha L_{k-1}'' + \beta L_{k-1}' + \gamma L_{k-1} - \lambda \int_a^b k_{11}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] \\ \quad - \lambda \sum_{k=1}^m c_{2k} \int_a^b k_{12}(x, t) L_{k-1}(t) dt = f_1(x) \\ - \lambda \sum_{k=1}^m c_{1k} \int_a^b k_{21}(x, t) L_{k-1}(t) dt + \sum_{k=1}^m c_{2k} \\ \quad \left[\alpha L_{k-1}'' + \beta L_{k-1}' + \gamma L_{k-1} - \lambda \int_a^b k_{22}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] = f_2(x) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\int_a^b \left[\alpha(x) L_{k-1}''(x) + \beta(x) L_{k-1}'(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{11} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] \\ \quad - \lambda \sum_{k=1}^m c_{2k} \left[\int_a^b \left[\int_a^b K_{12} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] = \int_a^b f_1(x) L_{p-1}(x) dx \\ - \lambda \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\int_a^b \left[\int_a^b K_{21} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] + \sum_{k=1}^m c_{2k} \\ \quad \left[\int_a^b \left[\alpha(x) L_{k-1}''(x) + \beta(x) L_{k-1}'(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{22} L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx \right] \\ \quad = \int_a^b f_2(x) L_{p-1}(x) dx \end{array} \right.$$

$$p = 1, 2, \dots, m;$$

on obtient un système d'équations linéaires $AX = b$ où :

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m,$$

$$X = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}]^T,$$

avec

$$b = \begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ \int_a^b f_1(x)L_0(x)dx \\ \int_a^b f_1(x)L_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_1(x)L_{m-3}(x)dx \\ a2 \\ b2 \\ \int_a^b f_2(x)L_0(x)dx \\ \int_a^b f_2(x)L_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_2(x)L_{m-3}(x)dx \end{bmatrix},$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} L_0(a) & L_1(a) & \cdots & L_{m-1}(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_0(a) & L'_1(a) & \cdots & L'_{m-1}(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & \cdots & A_{3,m} & A_{3,m+1} & A_{3,m+2} & \cdots & A_{3,2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & \cdots & A_{m,2m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_0(a) & L_1(a) & \cdots & L_{m-1}(a) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L'_0(a) & L'_1(a) & \cdots & L'_{m-1}(a) \\ A_{m+3,1} & A_{m+3,2} & \cdots & A_{m+3,m} & A_{m+3,m+1} & A_{m+3,m+2} & \cdots & A_{m+3,m+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2m,1} & A_{2m,2} & \cdots & A_{2m,m} & A_{2m,m+1} & A_{2m,m+2} & \cdots & A_{2m,2m} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} L_{j-1}(a) , & \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 1; 2; \dots ; m \end{array} \right. \\ L'_{j-1}(a) , & \left\{ \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 1; 2; \dots ; m \end{array} \right. \\ \int_a^b \left[\alpha(x) L''_{j-1}(x) + \beta(x) L'_{j-1}(x) + \gamma(x) L_{j-1}(x) - \lambda \int_a^b K_{11} L_{j-1}(t) dt \right] \\ L_{i-1}(x) dx & \left\{ \begin{array}{l} i = 3; 4; \dots ; m \\ j = 1; 2; \dots ; m \end{array} \right. \\ -\lambda \int_a^b \left[\int_a^b k_{12}(x, t) L_{j-m-1}(t) dt \right] L_{i-1}(x) dx , & \left\{ \begin{array}{l} i = 1; 2; \dots ; m \\ j = m+1; \dots ; 2m \end{array} \right. \\ -\lambda \int_a^b \left[\int_a^b k_{21}(x, t) L_{j-1}(t) dt \right] L_{i-m-1}(x) dx , & \left\{ \begin{array}{l} i = m+1; \dots ; 2m \\ j = 1; 2; \dots ; m \end{array} \right. \\ L_{j-m-1}(a) , & \left\{ \begin{array}{l} i = m+1 \\ j = m+1; \dots ; 2m \end{array} \right. \\ L'_{j-m-1}(a) , & \left\{ \begin{array}{l} i = m+2 \\ j = m+1; \dots ; 2m \end{array} \right. \\ \int_a^b \left[\alpha(x) L''_{j-m-1}(x) + \beta(x) L'_{j-m-1}(x) + \gamma(x) L_{j-m-1}(x) - \lambda \int_a^b k_{22}(x, t) L_{j-m-1}(t) dt \right] \\ L_{i-m-1}(x) dx , & \left\{ \begin{array}{l} i = m+3; \dots ; 2m \\ j = m+1; \dots ; 2m \end{array} \right. \end{array} \right.$$

4.2.2 Aproximation Numérique du systme d'équations intégro-différentielles de Volterra

- Considérons le système d'équations intégrales de volterra suivant :

$$\alpha(x)U''(x) + \beta(x)U'(x) + \gamma(x)U(x) - \lambda \int_a^x K(x, t)U(t)dt = F(x) \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned}
 u(x) &= [u_i(x)], & i = 1, \dots, n, \\
 u'(x) &= [u'_i(x)], & i = 1, \dots, n, \\
 u''(x) &= [u''_i(x)], & i = 1, \dots, n, \\
 f(x) &= [f_i(x)], & i = 1, \dots, n, \\
 K(x, t) &= [k_{i,j}(x, t)], & i, j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

$$\text{ou } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x \in [a, b] \quad ,$$

En appliquons la méthode de Galerkin à l'équation (4.2.6) on obtient un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. En utilisant les polynômes de Legendre, on pose

$$u_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x), \quad (4.2.7)$$

$$u'_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(x), \quad (4.2.8)$$

$$u''_i(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L''_{k-1}(x), \quad (4.2.9)$$

où $L_k(x)$ est le $k^{\text{ième}}$ polynômes de Legendre et c_{ik} sont des coefficients inconnus qui sont déterminés en résolvant le système algébrique d'équations linéaires $AX = b$. En substituant les relations (4.2.7),(4.2.8),(4.2.9) dans (4.2.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 &\alpha(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L''_{k-1}(x) + \beta(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(x) + \gamma(x) \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(x) \\
 &\quad - \lambda \int_a^x \sum_{j=1}^n K_{ij}(x, t) \sum_{k=1}^m c_{jk} L_{k-1}(t) dt = f_i(x)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^m c_{ik} [\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt]$$

$$-\lambda \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \left[\int_a^x K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] = f_i(x) \quad (4.2.10)$$

En multipliant les deux côtés de (4.2.10) par L_{p-1} , $p = 1, 2, \dots, n$ et en intégrant en de a à b , on obtient :

$$\sum_{k=1}^m c_{ik} \int_a^b \left[\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{ii}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx$$

$$- \lambda \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{k=1}^m c_{jk} \int_a^b \left[\int_a^x K_{ij}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] L_{p-1}(x) dx = \int_a^b f_i(x) L_{p-1}(x) dx$$

telle que, $i, j = 1, 2, \dots, n$ et $k, p = 1, 2, \dots, m$

$$u_i(a) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L_{k-1}(a) = a_i, \quad u'_i(a) \cong \sum_{k=1}^m c_{ik} L'_{k-1}(a) = b_i$$

on déduit un système algébrique d'équations linéaires $AX = b$.

Par exemple, pour $n = 2$

$$\begin{cases} \alpha(x) u''_1(x) + \beta(x) u'_1(x) + \gamma(x) u_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^x k_{11}(x, t) u_1(t) dt + k_{12}(x, t) u_2(t) dt \\ \alpha(x) u''_2(x) + \beta(x) u'_2(x) + \gamma(x) u_2(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^x k_{21}(x, t) u_1(t) dt + k_{22}(x, t) u_2(t) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(x) u''_1(x) + \beta(x) u'_1(x) + \gamma(x) u_1(x) - \lambda \int_a^x k_{11}(x, t) u_1(t) dt - \lambda \int_a^x k_{12}(x, t) u_2(t) dt = f_1(x) \\ \alpha(x) u''_2(x) + \beta(x) u'_2(x) + \gamma(x) u_2(x) - \lambda \int_a^x k_{21}(x, t) u_1(t) dt - \lambda \int_a^x k_{22}(x, t) u_2(t) dt = f_2(x) \end{cases}$$

$$u_s^{(r)}(x) \cong \sum_{k=1}^m c_{sk} L_{k-1}^{(r)}(x), \quad \text{avec } s = 1, 2 \text{ et } r = 0, 1, 2$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x k_{11}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] \\ \quad - \lambda \sum_{k=1}^m c_{2k} \int_a^x k_{12}(x, t) L_{k-1}(t) dt = f_1(x) \\ - \lambda \sum_{k=1}^m c_{1k} \int_a^x k_{21}(x, t) L_{k-1}(t) dt + \sum_{k=1}^m c_{2k} \\ \quad \left[\alpha(x) L''_{k-1}(x) + \beta(x) L'_{k-1}(x) + \gamma(x) L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x k_{22}(x, t) L_{k-1}(t) dt \right] = f_2(x) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\int_a^b [\alpha(x)L''_{k-1}(x) + \beta(x)L'_{k-1}(x) + \gamma(x)L_{k-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{11}L_{k-1}(t)dt] L_{p-1}(x)dx \right] \\ \quad - \lambda \sum_{k=1}^m c_{2k} \left[\int_a^b [\int_a^x K_{12}L_{k-1}(t)dt] L_{p-1}(x)dx \right] = \int_a^b f_1(x)L_{p-1}(x)dx \\ - \lambda \sum_{k=1}^m c_{1k} \left[\int_a^b [\int_a^x K_{21}L_{k-1}(t)dt] L_{p-1}(x)dx \right] + \\ \sum_{k=1}^m c_{2k} \left[\int_a^b [\alpha L''_{k-1} + \beta L'_{k-1} + \gamma L_{k-1} - \lambda \int_a^x K_{22}L_{k-1}(t)dt] L_{p-1}(x)dx \right] = \int_a^b f_2(x)L_{p-1}(x)dx \end{array} \right.$$

$$p = 1, 2, \dots, m$$

on obtient un système d'équations linéaires $AX = b$ où :

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m,$$

$$X = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}]^T,$$

avec

$$b = \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ \int_a^b f_1(x)L_0(x)dx \\ \int_a^b f_1(x)L_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_1(x)L_{m-3}(x)dx \\ a2 \\ b2 \\ \int_a^b f_2(x)L_0(x)dx \\ \int_a^b f_2(x)L_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_2(x)L_{m-3}(x)dx \end{pmatrix},$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} L_0(a) & L_1(a) & \cdots & L_{m-1}(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_0(a) & L'_1(a) & \cdots & L'_{m-1}(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & \cdots & A_{3,m} & A_{3,m+1} & A_{3,m+2} & \cdots & A_{3,2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & \cdots & A_{m,2m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_0(a) & L_1(a) & \cdots & L_{m-1}(a) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L'_0(a) & L'_1(a) & \cdots & L'_{m-1}(a) \\ A_{m+3,1} & A_{m+3,2} & \cdots & A_{m+3,m} & A_{m+3,m+1} & A_{m+3,m+2} & \cdots & A_{m+3,m+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2m,1} & A_{2m,2} & \cdots & A_{2m,m} & A_{2m,m+1} & A_{2m,m+2} & \cdots & A_{2m,2m} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} L_{j-1}(a) , & \begin{cases} i = 1 \\ j = 1; 2; \cdots ; m \end{cases} \\ L'_{j-1}(a) , & \begin{cases} i = 2 \\ j = 1; 2; \cdots ; m \end{cases} \\ \int_a^b [\alpha(x)L''_{j-1}(x) + \beta(x)L'_{j-1}(x) + \gamma(x)L_{j-1}(x) - \lambda \int_a^x K_{11}L_{j-1}(t)dt] \\ L_{i-1}(x) dx , & \begin{cases} i = 3; 4; \cdots ; m \\ j = 1; 2; \cdots ; m \end{cases} \\ -\lambda \int_a^b [\int_a^x k_{12}(x,t)L_{j-m-1}(t)dt] L_{i-1}(x) dx , & \begin{cases} i = 1; 2; \cdots ; m \\ j = m+1; \cdots ; 2m \end{cases} \\ -\lambda \int_a^b [\int_a^x k_{21}(x,t)L_{j-1}(t)dt] L_{i-m-1}(x) dx , & \begin{cases} i = m+1; \cdots ; 2m \\ j = 1; 2; \cdots ; m \end{cases} \\ L_{j-m-1}(a) , & \begin{cases} i = m+1 \\ j = m+1; \cdots ; 2m \end{cases} \\ L'_{j-m-1}(a) , & \begin{cases} i = m+2 \\ j = m+1; \cdots ; 2m \end{cases} \\ \int_a^b [\alpha(x)L''_{j-m-1}(x) + \beta(x)L'_{j-m-1}(x) + \gamma(x)L_{j-m-1} - \lambda \int_a^x k_{22}(x,t)L_{j-m-1}(t)dt] \\ L_{i-m-1}(x) dx , & \begin{cases} i = m+3; \cdots ; 2m \\ j = m+1; \cdots ; 2m \end{cases} \end{cases}$$

4.3 Exemples

Résolution numérique de quelques exemples de systeme d'équations intégral-différentielles de fridholm :

Exemple 7. [18]

Soit le systeme des equations intégral-différentielles de Fredholme suivant

$$\begin{cases} u_1''(x) - \int_0^1 \frac{1}{3} u_1(t) + \frac{1}{4} u_2(t) dt = \frac{8}{9}. \\ u_2''(x) - \int_0^1 \frac{x^2}{6} u_1(t) - \frac{x^2}{3} u_2(t) dt = 6x - \frac{x^2}{18}. \\ u_1(0) = 0; \quad u_1'(0) = \frac{1}{3}; \quad u_2(0) = 0; \quad u_2'(0) = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$ et $u_2(x) = x^3 - \frac{x}{2}$

La solutions approchée $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exact	$err_colocat$	err_Galerk	u_2_exact	$err_colocat$	err_Galerk
0.0	0.00000	0.000000e+00	0.000000e+00	0.00000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.2	0.08667	0.000000e+00	0.000000e+00	-0.09200	2.775558e-17	2.775558e-17
0.4	0.21333	2.775558e-17	2.775558e-17	-0.13600	2.775558e-17	2.775558e-17
0.6	0.38000	0.000000e+00	0.000000e+00	-0.08400	2.775558e-17	2.775558e-17
0.8	0.58667	1.110223e-16	1.110223e-16	0.11200	5.551115e-17	5.551115e-17
1.0	0.83333	1.110223e-16	1.110223e-16	0.50000	5.551115e-17	5.551115e-17

Tableau 4.3.1 : Comparaison entre l'erreure de la methode de colocation et l'erreure de la methode de Galerkin de l'exemple 7 pour $m = 10$

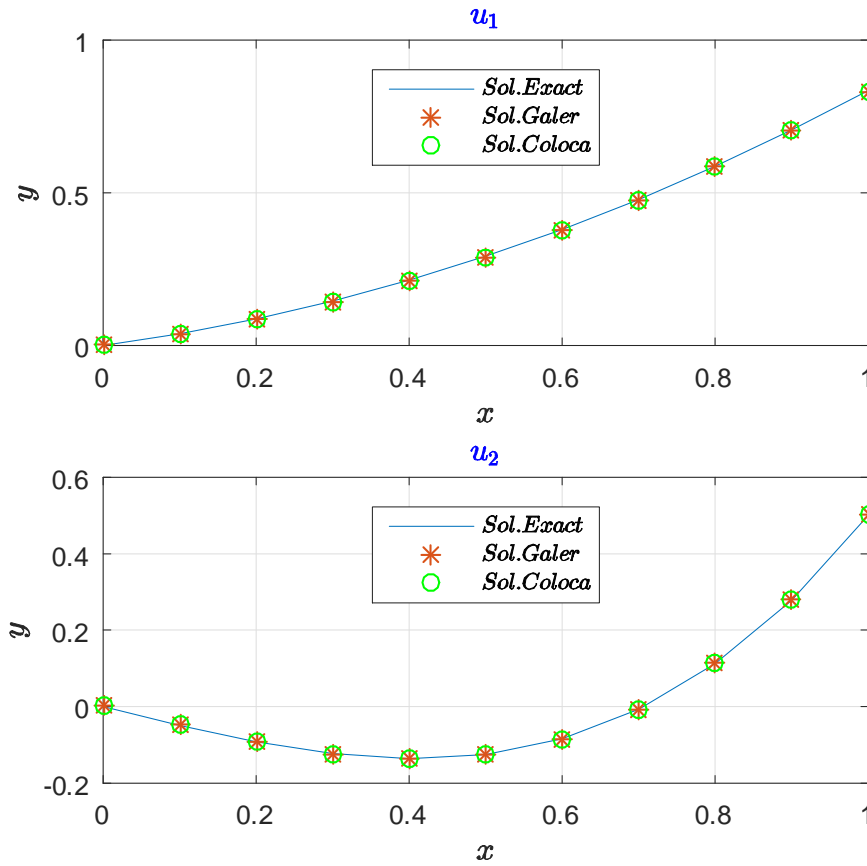


Figure 4.3.1 : Comparaison entre la solution approchés et la solution exacte de l'exemple 7 pour $n = 10$

Exemple 8. [12]

Soit le systeme des equations intégro-différentielles de Fredholme suivant

$$\begin{cases} u_1'(x) = e^x - \frac{5}{2} + \int_0^{\ln 2} (u_1(t) + u_2(t)) dt, \\ u_2'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{4} + \int_0^{\ln 2} t(u_1(t) - u_2(t)) dt, \\ u_1(0) = 1; \quad u_2(0) = 1; \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = e^x$ et $u_2(x) = e^{2x}$.

La solution approchée $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenue par la résolution du système des équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_{1_exact}	$err_colocat$	err_Galerk	u_{2_exact}	$err_colocat$	err_Galerk
0.00000	1.00000	0.000000e+00	1.110223e-16	1.00000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.13863	1.14870	2.384892e-11	0.000000e+00	1.31951	1.971561e-10	5.129230e-13
0.27726	1.31951	4.762946e-11	4.440892e-16	1.74110	1.940692e-10	1.070699e-12
0.41589	1.51572	7.140999e-11	4.440892e-16	2.29740	1.904463e-10	1.120437e-12
0.55452	1.74110	9.519052e-11	0.000000e+00	3.03143	1.866600e-10	4.822809e-13
0.69315	2.00000	1.189693e-10	2.220446e-16	4.00000	1.783080e-10	0.000000e+00

Tableau 4.3.2 : Comparaison entre l'erreur de la methode de colocation et l'erreur de la methode de Galerkin de l'exemple 8 pour $m = 10$

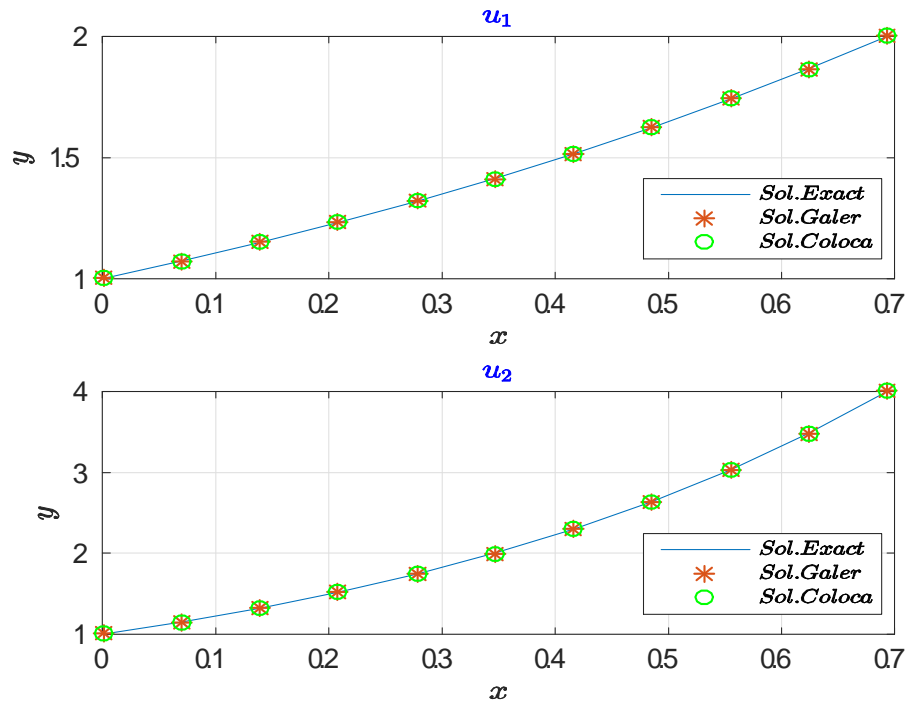


Figure 4.3.2 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 8 pour $n = 10$

Exemple 9. [12]

Soit le système des équations intégral-différentielles de Fredholm suivant

$$\begin{cases} u_1''(x) = -\cos x - (2 - \frac{\pi}{2}) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-t)(u_1(t) - u_2(t))dt, \\ u_2''(x) = -\sin x + (2 - \frac{\pi}{2}) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+t)(u_1(t) - u_2(t))dt, \\ u_1(0) = 1; \quad u_1'(0) = 0; \quad u_2(0) = 0; \quad u_2'(0) = 1; \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = \cos x$ et $u_2(x) = \sin x$

La solution approchée $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenue par la résolution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exact	$err_colocat$	err_Galerk	u_2_exact	$err_colocat$	err_Galerk
0.00000	1.00000	3.219647e-14	8.881784e-16	0.00000	1.765255e-14	1.698641e-14
0.31416	0.95106	6.504645e-09	8.471002e-13	0.30902	5.219135e-09	1.013245e-12
0.62832	0.80902	1.305808e-08	3.806289e-12	0.58779	8.406462e-09	3.938183e-12
0.94248	0.58779	1.872761e-08	3.922418e-12	0.80902	7.053846e-09	3.802736e-12
1.25664	0.30902	2.442921e-08	1.037503e-12	0.95106	2.487643e-10	8.344436e-13
1.57080	0.00000	3.107907e-08	1.593742e-14	1.00000	1.292156e-08	2.753353e-14

Tableau 4.3.3 : Comparaison entre l'erreur de la méthode de collocation et l'erreur de la méthode de Galerkin de l'exemple 9 pour $m = 10$

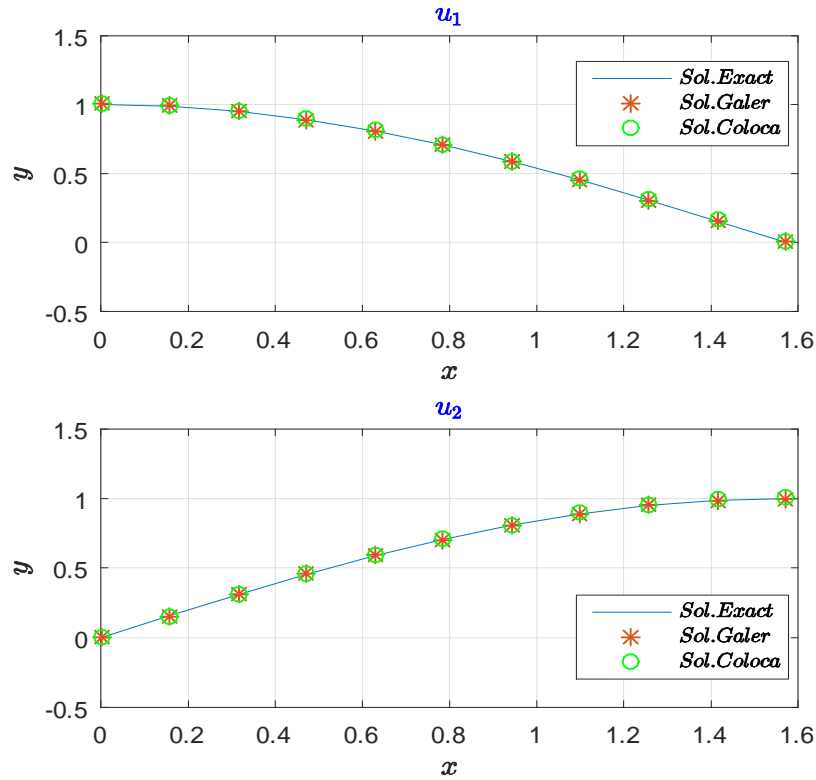


Figure 4.3.3 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 9 pour $n = 10$

Résolution numérique de quelques exemples de système d'équations intégro-différentielles de Volterra :

Exemple 10. [17]

Soit le système d'équations intégro-différentielles de Volterra suivant :

$$\begin{cases} u_1''(x) + xu_1'(x) + 2u_1(x) = -\frac{2x^6}{5} - \frac{x^5}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 3x + 2 + \int_0^x tu_1(t) + xt^2u_2(t)dt \\ u_2''(x) - 2xu_2'(x) + u_2(x) = -\frac{13}{20}x^5 - \frac{7}{12}x^4 - 6x^2 - x + 4 + \int_0^x xtu_1(t) + t^2u_2(t)dt \\ u_1(0) = 0; \quad u_1'(0) = 1; \quad u_2(0) = 1; \quad u_2'(0) = 0; \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = x + x^2$ et $u_2(x) = x + 2x^2$.

La solution approchée $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenue par la résolution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exact	$err_colocat$	err_Galerk	u_2_exact	$err_colocat$	err_Galerk
0.0	0.00000	2.606249e-14	0.000000e+00	0.00000	7.771561e-16	0.000000e+00
0.2	0.24000	1.543210e-14	2.775558e-17	0.28000	1.110223e-16	1.110223e-16
0.4	0.56000	5.218048e-15	0.000000e+00	0.72000	2.220446e-16	0.000000e+00
0.6	0.96000	5.107026e-15	0.000000e+00	1.32000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.8	1.44000	1.620926e-14	0.000000e+00	2.08000	4.440892e-16	4.440892e-16
1.0	2.00000	2.553513e-14	0.000000e+00	3.00000	4.440892e-16	0.000000e+00

Tableau 4.3.4 : Comparaison entre l'erreur de la methode de colocation et l'erreur de la methode de Galerkin de l'exemple 1 pour $m = 10$

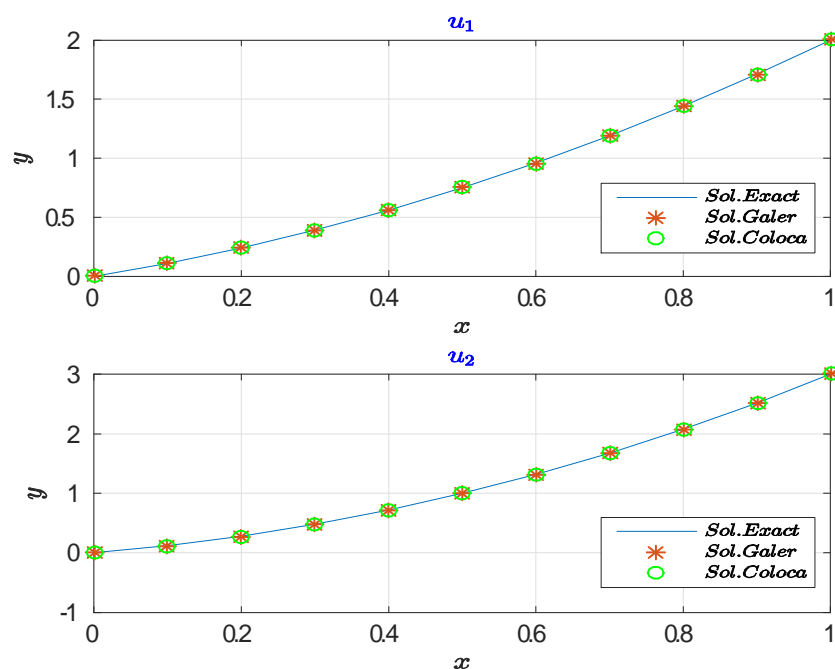


Figure 4.3.4 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 10 pour $n = 10$

Exemple 11. [13]

Soit le système d'équations intégral-différentielles de Volterra suivant :

$$\begin{cases} u_1''(x) = 2 \cos(x) - \sin(x) - 1 + x - x^2 + \int_0^x (u_1(t) + u_2(t)) dt \\ u_2''(x) = 1 + x - \cos(x) + \int_0^x (u_1(t) - u_2(t)) dt \\ u_1(0) = 1; \quad u_1'(0) = 1; \quad u_2(0) = 0; \quad u_2'(0) = 2; \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = x + \cos(x)$ et $u_2(x) = x + \sin(x)$.

La solution approchée $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenue par la résolution du système d'équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$.

	u_1			u_2		
x_i	u_{1_exact}	$err_colocat$	err_Galerk	u_{2_exact}	$err_colocat$	err_Galerk
0.0	1.00000	2.664535e-15	4.440892e-16	0.00000	7.632783e-16	6.938894e-18
0.2	1.18007	1.332268e-15	4.440892e-16	0.39867	3.719247e-15	3.885781e-16
0.4	1.32106	1.776357e-15	4.440892e-15	0.78942	3.330669e-15	9.325873e-15
0.6	1.42534	4.440892e-16	1.110223e-15	1.16464	3.108624e-15	8.881784e-16
0.8	1.49671	4.440892e-16	8.437695e-15	1.51736	1.998401e-15	1.487699e-14
1.0	1.54030	8.881784e-16	3.419487e-14	1.84147	6.439294e-15	6.483702e-14

Tableau 4.3.5 : Comparaison entre l'erreur de la methode de colocation et l'erreur de la methode de Galerkin de l'exemple 11 pour $m = 10$

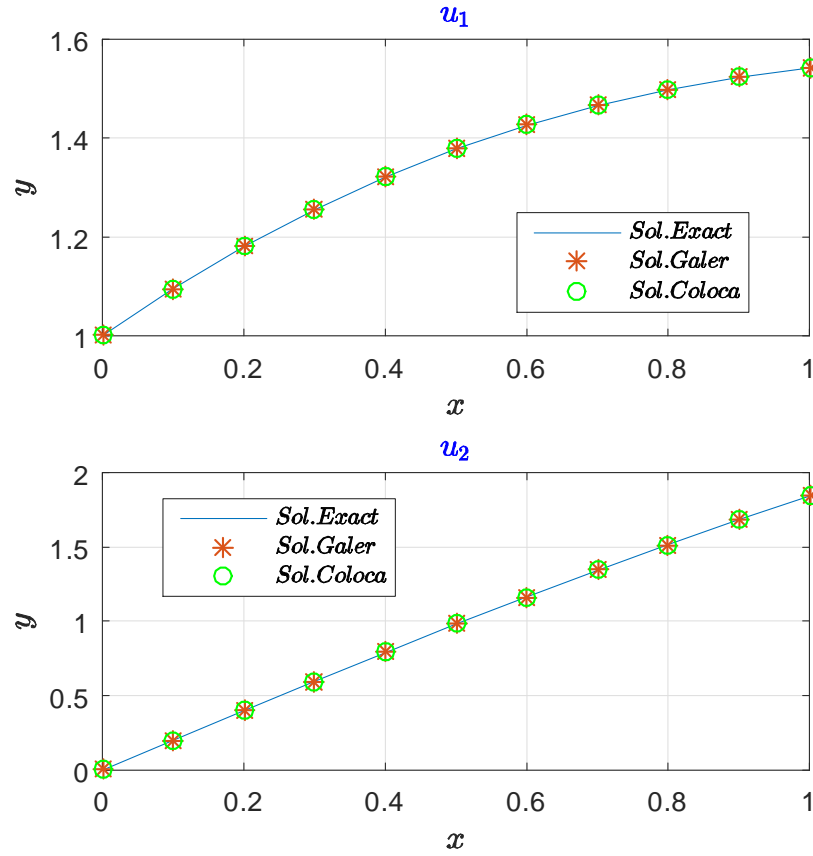


Figure 4.3.5 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 11 pour $n = 10$

Exemple 12. [17]

Soit le système d'équations intégro-différentielles de Volterra suivant :

$$\begin{cases} u_1''(x) + 2xu_1'(x) - u_1(x) = -\frac{2}{5}x^6 - \frac{7}{12}x^4 - \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 3x + 2 + \int_0^x u_1(t)dt - \int_0^x u_2(t)dt \\ u_2''(x) + u_2'(x) - 2xu_2(x) = -\frac{13}{20}x^5 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 5 + \int_0^x u_1(t)dt + \int_0^x u_2(t)dt \\ u_1'(0) = 1 \quad u_1(0) = 1; u_2'(0) = 1 \quad u_2(0) = 1 \end{cases}$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = e^x$ et $u_2(x) = 1 + \sin(x)$

La solution approchée $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenue par la résolution du système des équations linéaires $AX = b$ pour $m = 10$.

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exact	$err_colocat$	err_Galerk	u_2_exact	$err_colocat$	err_Galerk
0.0	1.00000	3.930190e-14	0.000000e+00	1.00000	6.461498e-14	0.000000e+00
0.2	1.22140	1.207037e-10	1.443290e-14	1.19867	5.339529e-11	9.103829e-15
0.4	1.49182	2.643668e-10	6.195044e-14	1.38942	1.094287e-10	3.375078e-14
0.6	1.82212	3.992835e-10	6.239453e-14	1.56464	1.575398e-10	3.308465e-14
0.8	2.22554	5.255800e-10	1.421085e-14	1.71736	2.014198e-10	7.327472e-15
1.0	2.71828	6.454712e-10	0.000000e+00	1.84147	2.446432e-10	0.000000e+00

Tableau 4.3.6 : Comparaison entre l'erreure de la methode de colocation et l'erreure de la methode de Galerkin de l'exemple 12 pour $m = 10$

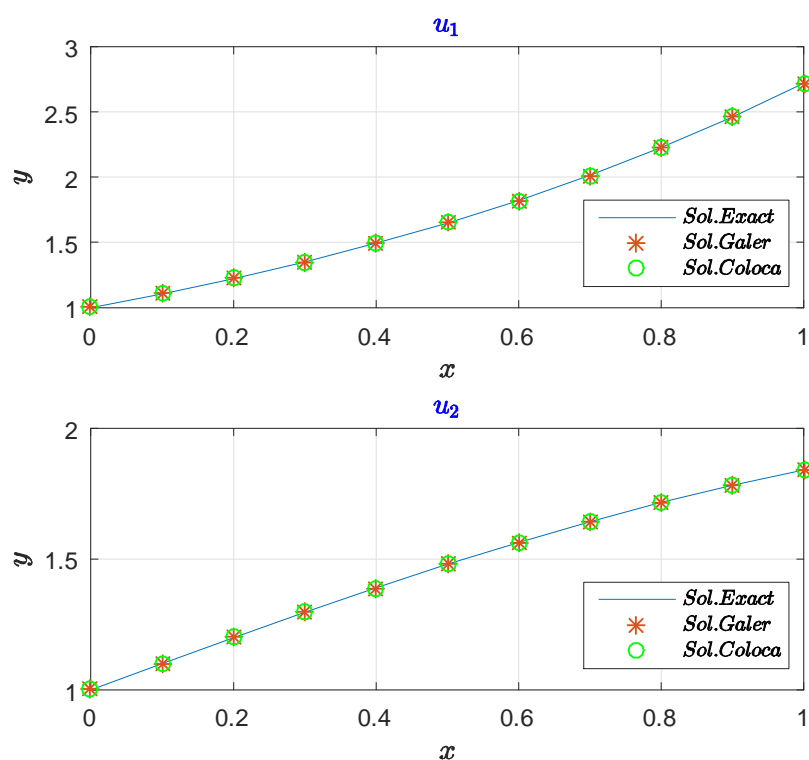


Figure 4.3.6 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 12 pour $n = 10$

Variantes d'exemples (ces exemples n'ont pas de forme spécifique)
Exemple 13 (Fredholm) [16]

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1''(x) - xu_2'(x) + 2xu_1(x) = 2x^3 - \frac{37}{12}x^2 + \frac{323}{60}x + 2 + \int_0^1 (x^2t u_1(t) - xt^2 u_2(t)) dt, \\ u_2''(x) - 2xu_1'(x) + u_2(x) = -5x^2 + \frac{109}{30}x - 1 + \int_0^1 (xtu_1(t) + xt^3u_2(t)) dt, \\ u_1(0) = 3 ; \quad u_1(1) = 2; \quad u_2(0) = 1; \quad u_2(1) = 1; \end{array} \right.$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = x^2 - 2x + 3$ et $u_2(x) = -x^2 + x + 1$

La solution approchée $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenue par la résolution du système des équations linéaires $AX = b$

	u_1			u_2		
x_i	u_1_exact	$err_colocat$	err_Galerk	u_2_exact	$err_colocat$	err_Galerk
0.0	3.00000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.00000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.2	2.64000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.16000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.4	2.36000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.24000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.6	2.16000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.24000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.8	2.04000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.16000	0.000000e+00	0.000000e+00
1.0	2.00000	0.000000e+00	0.000000e+00	1.00000	0.000000e+00	0.000000e+00

Tableau 4.3.7 : Comparaison entre l'erreur de la methode de colocation et l'erreur de la methode de Galerkin de l'exemple 13 pour $m = 10$

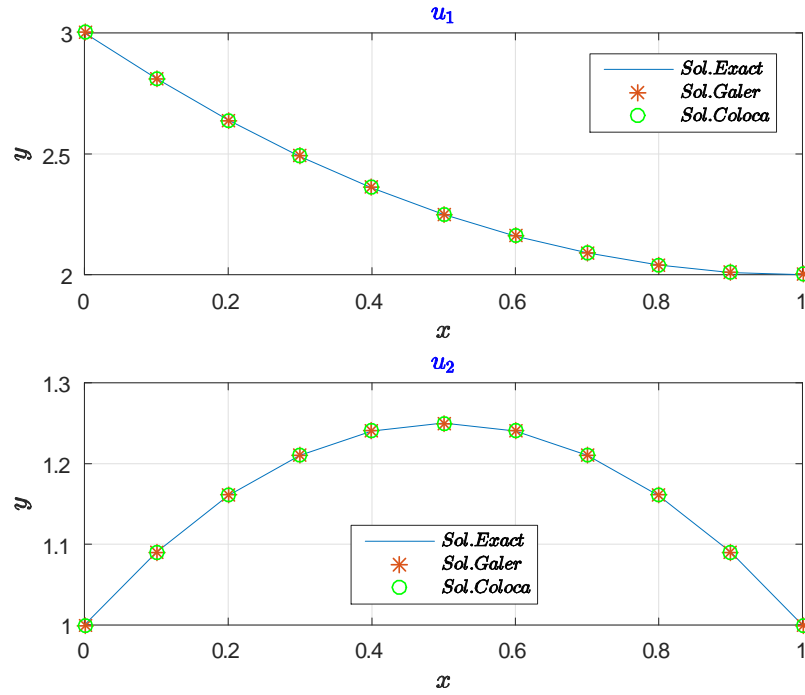


Figure 4.3.7 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 13 pour $n = 10$

Exemple 14 (Volterra) [19]

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_1'(x) - \frac{1}{2}xu_1(x) + \frac{3}{2}u_2(x) = f_1(x) + \int_{-1}^x (u_1(t) - 3xu_2(t)) dt, \\ x^2u_1(x) + u_2'(x) - xu_2(x) = f_2(x) + \int_{-1}^x ((2x+t)u_1(t) + 3t^2u_2(t)) dt, \\ f_1(x) = \frac{5}{2} - x - \frac{27}{2}x^2 + x^4 + \frac{3}{2}(-1 + 2x^2) - \frac{1}{2}x(-3x + 4x^3) \\ f_2(x) = \frac{2}{5} + 3x + 3x^3 - \frac{8}{5}x^5 + x^2(-3x + 4x^3) \\ u_1(0) = 0 ; \quad u_2(0) = -1; \end{array} \right.$$

où les solutions exactes sont données par : $u_1(x) = 4x^3 - 3x$ et $u_2(x) = 2x^2 - 1$.

La solution approchée $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ de la solution exacte (u_1, u_2) est obtenu par la résolution du système des équations linéaires $AX = b$

	u_1			u_2		
x_i	u_{1_exact}	$err_colocat$	err_Galerk	u_{2_exact}	$err_colocat$	err_Galerk
-1.00000	-1.00000	7.105427e-15	2.220446e-16	1.00000	0.000000e+00	0.000000e+00
-0.60000	0.93600	1.998401e-15	0.000000e+00	-0.28000	7.771561e-16	0.000000e+00
-0.20000	0.56800	1.110223e-16	0.000000e+00	-0.92000	1.110223e-16	0.000000e+00
0.20000	-0.56800	.661338e-16	0.000000e+00	-0.92000	6.661338e-16	0.000000e+00
0.60000	-0.93600	1.776357e-15	0.000000e+00	-0.28000	0.000000e+00	0.000000e+00
1.00000	1.00000	5.773160e-15	2.220446e-16	1.00000	2.220446e-16	0.000000e+00

Tableau 4.3.8 : Comparaison entre l'erreur de la méthode de colocation et l'erreur de la méthode de Galerkin de l'exemple 14 pour $m = 10$

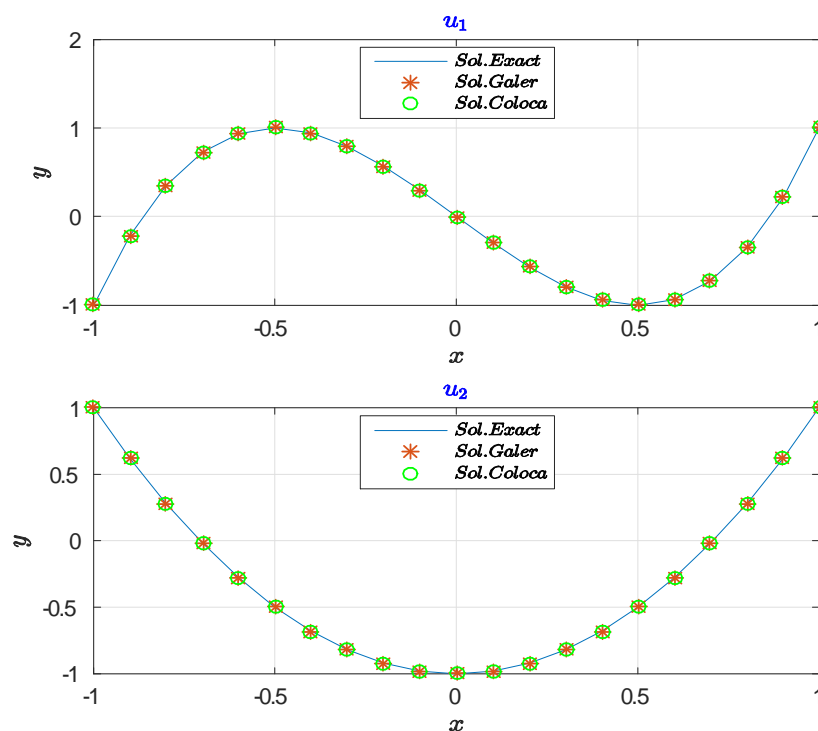


Figure 4.3.8 : Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 14 pour $n = 20$

Conclusion

les méthodes de projection (Collocation, Galerkin), comme nous l'avons vu, leur stratégie est basée sur la projection de notre équation dans un sous espace fonctionnel de dimension fini, dans lequel on cherche à approcher la solution exacte par une combinaison linéaire des éléments de la base de ce sous espace et travailler avec le résidu. Mais, la question qui se pose toujours, pour le choix des points de collocation et de la base qui mènent à la meilleure approximation de la solution. En fin, en concluant que les conditions spontanées de régularité de la fonction noyau, et le comportement de la solution exacte pour chaque équation intégrale, pose un défi pour le calcul numérique à haute résolution. Cependant dans l'objectif d'améliorer nos résultats (la solution approchée), notre intuition, est d'exhibé des méthodes d'ordre élevé, notamment les méthodes spectrales. Par conséquent, dans la continuité directe de notre travail de thèse, précisément dans le cas de notre contribution sur les méthodes de résolution numérique des équations intégrales et dans l'objectif d'améliorer les résultats obtenus, il est indispensable de maîtriser les différentes techniques d'approximation récentes, d'interpolation, d'intégration ou de développement en série d'une part, d'autre part, de posséder les clés qui mettent en oeuvre ces méthodes sous forme d'algorithmes efficaces, de maîtriser les différents langages de programmation évolue

La résolution numérique des système d'équations intégrales et integro-différentielles sont souvent nécessaires, faute de l'existence de solution analytiques. Les méthodes de résolution numérique des systèmes d'équations intégrales et integro-différentielles jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux dans les assimilations des phénomènes scientifiques qui sont difficiles à réaliser, voir impossible à résoudre.

Nous proposons deux méthode numérique de résolution systemes des équations intégrales, celle méthode spectrale (approximée par un polynôme de Legendre). Nous avons calculé les erreurs de la valeur absolue de la différence entre la solution exacte et approchée connue d'avance et la solution numérique qu'on a trouvée, pour un choix d'une solution approchée sous forme une série $\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i Legendre_i(x)$. Nous avons comparé les erreurs de la valeur absolue par la méthode de Collocation et par la méthode de Galerkin. Ensuite on a schématisé ces résultats En n, la lecture de ces schémas, nous a donné une illusion

Conclusion

générale sur la méthode ainsi proposée. Cela donnera un avantage de plus à la résolution numérique des équations intégrales.

Bibliographie

- [1] **-Alfio.Quarteroni, Riccardo.Sacco et Fausto.Saleri.** Numerical Mathematics, Springer, 2000.
- [2] **-Azedine.Rahmoune,** Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales, Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat, Université de Batna, 2011.
- [3] **-Bachir.Gagui,** Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz. Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat, Université de Msila, 2015.
- [4] **-Benoit.Perthame,** Topologie et analyse différentielle, 25 March 2005.
- [5] **-Christian GULP IN,** MANUEL DE CAALCUL NUMÉRIQUE APPLIQUÉ, EDP SCIENCES.
- [6] **-Elisabeth.Burroni.** La topologie des espaces métriques, ellipses, 1997.
- [7] **-Kolmogorov.A, Fomine.S,** Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, 2^e édition, Mir.moscou, 1973.
- [8] **-M. HITTA Amara,** Cours Licence Topologie des espaces Métriques, Université 8 Mai 1945, Guelma.
- [9] **-Moustafa.Nadir,** Analyse fonctionnelle, cour master-01-, université de Msila, 2012/2013
- [10] **-Won Young.Yang, Wenwu.Cao, Tae-Sang.Chung et John.Morris.** APPLIED NUMERICAL METHODS USING MATLAB, Wiley-interscience, 2004.

- [11] -**Yves.Sonntag**, TOPOLOGIE et ANALYSE FONCTIONNELLE, ellipses, 1997.
- [12] -**Abdul-Majid Wazwaz**, Linear and Nonlinear Integral Equations, Saint Xavier University Chicago,IL60655 20 April 2011.
- [13] -**Esmale Hesameddini** et **Azam Rahimi**, A New Numerical Scheme for Solving Systems of Integro-Differential Equations, Department of Mathematics, Shiraz University of Technology, P. O Box 71555-313, Shiraz, Iran,2013.
- [14] -**M.zarebnia^a.J.Rashidinia^b**, *Approximate solution of systemes of Volterra interale equations Withe error analysis*,^aDepartment of Mathematics , University of Mohaghegh Ardabili ,56199-11367, Ardabil, Iran .^b*School of Mathematics, Iran University of Science end Technology*, Narmak, Tehran, 16844, Iran, 03 Nov 2010.
- [15] -**A. Golbabai, B. Keramati**,*Easy computational approach to solution of system of linear Fredholm integral equations*, Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Iran University of Science and Technology, Narmak, Tehran 16844, Iran Accepted 2 January 2007
- [16] -**Farshid Mirzaee, Saeed Bimesl**, *Numerical solutions of systems of high-order Fredholm integro-differential equations using Euler polynomials*, Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, Malayer University, P. O. Box 65719-95863, Malayer, Iran
- [17] -**Dr. Omer M. A. Al-Faour^a, Rostam K. Saeed^b**, SOLUTION OF A SYSTEM OF LINEAR VOLTERA INTEGRAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS BY SPECTRAL METHOD, ^aUniversity of Technology – Department of Applied, ^bUniversity of Salahaddin/Erbil-College of Science-Department of Mathematics Mathematics.
- [18] -**M. Khanian¹, A. Davari²**,*Solution of System of Fredholm Integro-Differential Equations By Adomian Decomposition Method*, ¹Department of Mathematics, Khorasgan (Isfahan) Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran, ²Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Isfahan, 81746 -73441, Isfahan, Iran.

- [19] **-J. Rashidinia, A. Tahmasebi**, *Taylor series method for the system of linear Volterra integro-differential equations*, School of Mathematics, Iran University of Science and Technology P. O. Box, 16846-13114, Tehran, Iran.